

Представление чисел заполнения в квантовой механике.

Как известно, явление сверхпроводимости имеет чисто квантовую природу, в отличие, например, от динамики решётки, которую, вообще говоря, можно сформулировать и на языке классической физики. Более того, для понимания сверхпроводимости недостаточно квантовой механики одной частицы (как, например, для описания электронов проводимости в обычных (несверхпроводящих) металлах), т.е. необходимо квантово-механическое описание системы N тождественных взаимодействующих электронов ($N \rightarrow \infty$). Естественным языком для такого описания является так называемый аппарат «вторичного квантования» или «представление чисел заполнения».

Прежде, чем говорить о конкретизации последнего, я скажу о понятии «представления» в квантовой механике вообще. Наиболее отчетливо эта идея была сформулирована Дираком в его книге «Принципы квантовой механики». В простейшем случае квантово-механическая система с гамильтонианом H полностью описывается вектором состояния $|\psi\rangle$, эволюция которого во времени подчиняется уравнению Шрёдингера.

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle$$

Понятие «волновой функции» является вторичным - это так называемый «представитель вектора состояния». В зависимости от выбора базиса в гильбертовом пространстве, мы получаем различные представления вектора состояния $|\psi\rangle$. Так, например, если ортами в гильбертовом пространстве выбрать собственные векторы оператора координаты $\hat{r}$ (т.е. $\hat{r}|r\rangle = r|r\rangle$), то полученное представление называется координатным. Если оператора импульса $\hat{p}$ (т.е. $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$)-то импульсным и т.д.. Тогда $\langle r|\psi\rangle$ есть «волновая функция» в координатном представлении, $\langle p|\psi\rangle$ -в импульсном и т.д. Средние значения какого-либо оператора A в состоянии $|\psi\rangle$ обозначаются как $\langle \psi|A|\psi\rangle$. Одним из представлений, особенно удобных в многочастичных задачах является представление «чисел заполнения». В нём ортами в гильбертова пространства являются собственные векторы оператора числа частиц, обозначаемые как $|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle$, где n_i -число частиц в состоянии i . В дальнейшем в качестве индекса состояния будем выбирать импульс частицы и работать

лишь с частицами тождественных фермионов, для которых $n_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ в силу принципа Паули. Тогда состояние $|001_{p_3}01_{p_5}0...0\rangle$ означает, что в нём есть только две частицы с импульсами p_3 и p_5 .

Важным является то, что полный набор этих состояний может быть получен применением, так называемых операторов рождения частиц в состояниях $\vec{p}$ к вектору состояния вакуума $|0\rangle = |0,0,...\rangle$, т.е. состояния, в котором частицы отсутствуют. Например, $c_{p_2}^+ |0\rangle = |0,1_{p_2},0,...0\rangle$, $c_{p_5}^+ (c_{p_2}^+ |0\rangle) = |0,1_{p_2},0,0,1_{p_5},0,...\rangle$ и т.д. Операторы c_p^+ -неэрмитовы, и поэтому можно рассматривать и сопряженные ему c_p как операторы уничтожения, которые уничтожают частицу в данном состоянии, т.е. $c_{p_2} |0,1_{p_2},0,...0\rangle = |0\rangle$. Существенно, что любой оператор уничтожения c_p , действующий на вакуумное состояние $|0\rangle$, даёт нулевой вектор, т.е. отсутствие состояния вообще.

Итак, любое состояние системы может быть сконструировано из вакуума последовательным применением соответствующих операторов рождения. В квантовой механике доказывается, что любой оператор может быть выражен через операторы c^+ и c достаточно простым образом. Так, для одночастичного оператора $\hat{A}$ общая формула такова

$$\hat{A} = \sum_{i,k} \langle i | \hat{A} | k \rangle c_i^+ c_k$$

Оператор импульса всей системы $\hat{P} = \sum_i \vec{p}_i$ представляется в виде

$$\hat{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_p^+ a_p \quad \text{и} \quad \varepsilon_p = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad \hat{\mathcal{E}}_{кин} = \sum_{\vec{p}} (\vec{p}^2 / 2m) a_p^+ a_p ,$$

где $\hat{\mathcal{E}}_{кин}$ - оператор кинетической энергии. Оператор числа частиц:

$$\hat{N} = \sum_p \hat{n}_p = \sum_p c_p^+ c_p .$$

Для двухчастичного (бинарного) оператора (например, потенциальной энергии взаимодействия двух частиц, общая формула имеет вид

$$\hat{\omega} = \sum_{p_1 p_2, p_1' p_2'} \omega_{p_1 p_2; p_1' p_2'} c_{p_1}^+ c_{p_2}^+ c_{p_1} c_{p_2}$$

Вычисление средних значений операторов значительно упрощается, если учесть, что они подчиняются антикоммутационным соотношениям.

$$\{c_{p\sigma}^+ c_{p'\sigma'}\} \equiv c_{p\sigma}^+ c_{p'\sigma'} + c_{p'\sigma'} c_{p\sigma}^+ = \delta_{pp'} \delta_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 0 & p' \neq p, \sigma' \neq \sigma \\ 1 & p' = p, \sigma' = \sigma, \end{cases}$$

а также $\{c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma}^+\} = \{c_{p\sigma} c_{p\sigma}\} = 0$, откуда следует, что $(c_{p\sigma}^+)^2 = c_{p\sigma}^2 = 0$.

Вычислим, например, среднее значение оператора числа частиц $n_p = c_p^+ c_p$

в состоянии $|\phi_2\rangle = a_p^+ a_{p'}^+ |0\rangle$. Тогда $\langle\phi_2| = \langle 0| (a_p^+ a_{p'}^+)^+ = \langle 0| a_p a_{p'}$

$$\begin{aligned} \text{и } \langle\phi_2| \hat{n}_p |\phi_2\rangle &= \langle 0| a_p a_{p'} (a_p^+ a_{p'}^+) a_p^+ a_{p'}^+ |0\rangle = \langle 0| a_p a_{p'} \underbrace{a_p^+ a_{p'}^+}_{1-a_p^+ a_p} a_p^+ a_{p'}^+ |0\rangle - \langle 0| \cancel{a_p a_{p'} a_p^+ a_{p'}^+} |0\rangle = \\ &= \langle 0| \underbrace{a_p a_{p'}^+}_{1-a_p^+ a_p} |0\rangle - \langle 0| a_p a_{p'}^+ a_p a_{p'}^+ |0\rangle = \langle 0|0\rangle - \langle 0| \cancel{a_p^+ a_{p'}} |0\rangle + \langle 0| \cancel{a_p a_{p'}^+} a_p |0\rangle = 1 \end{aligned}$$

что и следовало ожидать. Вычисление среднего значения $n_{p'} = c_{p'}^+ c_{p'}$ в этом же состоянии $|\phi_2\rangle$ также должно дать 1. Проверим это:

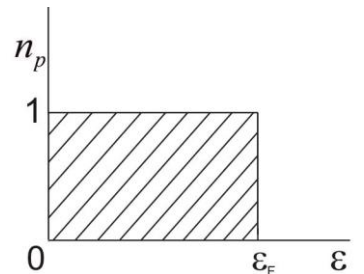
$$\begin{aligned} \langle\phi_2| \hat{n}_{p'} |\phi_2\rangle &= \langle 0| a_p a_{p'} (a_p^+ a_{p'}^+) \underbrace{a_{p'}^+ a_{p'}^+}_{-a_{p'}^+ a_{p'}} |0\rangle = -\langle 0| a_p a_{p'} a_{p'}^+ a_{p'}^+ \underbrace{a_p^+ a_{p'}^+}_{1-a_p^+ a_p} |0\rangle = -\langle 0| a_p a_{p'} \underbrace{a_{p'}^+ a_{p'}^+}_{-a_{p'}^+ a_{p'}} |0\rangle + \\ &+ \langle 0| a_p a_{p'} a_{p'}^+ a_{p'}^+ \cancel{a_p^+ a_{p'}} |0\rangle = \langle 0| a_p a_{p'} \underbrace{a_{p'}^+ a_{p'}^+}_{1-a_p^+ a_p} |0\rangle = \langle 0| a_p a_{p'}^+ |0\rangle - \langle 0| \cancel{a_p a_{p'}^+ a_p a_{p'}^+} |0\rangle = \\ &= \langle 0| 1 - \cancel{\hat{n}_p} |0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 \end{aligned}$$

Тогда $\langle\phi_2| \hat{n}_p + \hat{n}_{p'} |\phi_2\rangle = 1+1 = 2$, что физически очевидно.

При этих вычислениях мы активно использовали антикоммутационные соотношения и то, что $\hat{n}_p |0\rangle = 0$ и $\langle 0|0\rangle = 1$.

1). Феномен Купера.

Рассмотрим основное состояние ($T=0$) системы невзаимодействующих электронов в металле. Их распределение по энергиям описывается фермиевской ступенькой. Допустим, что мы добавили к системе два электрона в состояниях $(\vec{p}_1, \sigma_1)$ и $(\vec{p}_2, \sigma_2)$. Купер показал, что если эти состояния таковы, что $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ и $\sigma_1 = -\sigma_2$, то взаимодействие этих электронов между собой приводит к появлению их



связанного состояния с $\varepsilon < 2\varepsilon_F$, и результирующее понижение энергии в пределе слабого взаимодействия

$$\Delta \sim \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{N(0)g}}$$

где g - эффективная константа взаимодействия электронов (так называется константа связи). С учетом этого можно предположить, что основное состояние системы взаимодействующих электронов должна быть неустойчива к отношению куперовского спаривания. Из решения Купера следует

а). неаналитичность Δ по g , т. е. невозможность получить неустойчивость по теории возмущений;

б). неустойчивость возможна при сколь угодно малом $g \rightarrow 0$.

2). Редуцированный гамильтониан и пробная волновая функция БКШ ($T = 0$).

Рассмотрим гамильтониан взаимодействия электронов через фононы, который может быть записан в виде $\mathcal{H} = \sum_{p\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} + H_i$.

3. Окончательно, закон эффективного взаимодействия электронов через фононы, лежащий в основе теории БКШ, формулируется так: электроны, энергия которых отличается от энергии Ферми не больше, чем на величину $\hbar \omega_D \equiv \theta_D = kT_D$, где ω_D, θ_D и T_D - дебаевские частота, энергия и температура, притягиваются друг к другу. Энергия их взаимодействия равна $-g$.

Теория Бардина-Купера-Шриффера (БКШ)

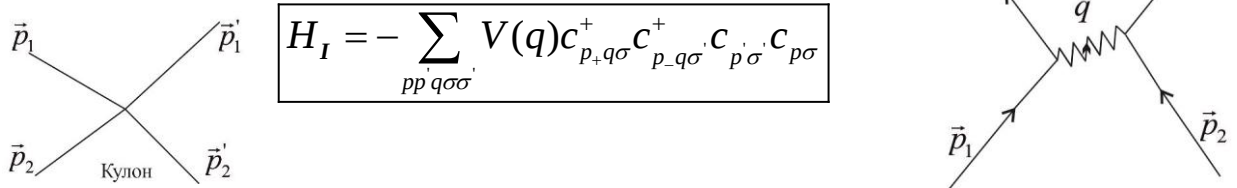
1. Электрон-фононное взаимодействие (ЭФВ) в теории БКШ (по Шмидту В.В.).

Изотоп-эффект $\left(T_c \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \right)$ в сверхпроводимости явился первым намёком на роль фононов в механизме сверхпроводимости. Но фононы - это квантованные колебания ионной решётки с $(M \gg m)$. В 1952 г. Бардин и Фрелих независимо показали, что взаимодействие между электронами и колебаниями кристаллической решётки (ЭФВ) может вызвать дополнительное

взаимодействие между электронами. При определённых условиях оно будет давать притяжение между электронами, а не кулоновское отталкивание, характерное для их взаимодействия. Если такое притяжение будет сильнее кулоновского отталкивания, то в металле появится эффективное притяжение, и как следствие, сверхпроводимость.

2. Возникновение эффективного притяжения.

Пусть $T = 0$. Тогда тепловых фононов нет. Однако через обмен виртуальными фононами может возникнуть притяжение между электронами.



Итак, один электрон излучил фонон с волновым импульсом $\vec{q}$, а второй его подхватил. В результате , т.е. электроны провзаимодействовали.

$$\begin{aligned}\vec{p}_1' &= \vec{p}_1 - \vec{q} \\ \vec{p}_2' &= \vec{p}_2 + \vec{q}\end{aligned}$$

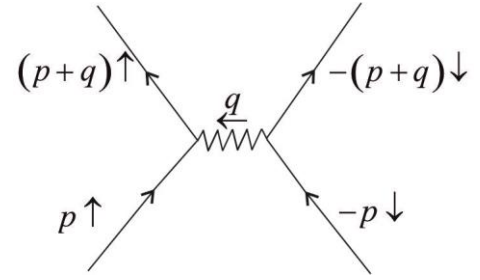
Знак электрон-фононного взаимодействия: при переходе электрона из $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_1'$ возникает колебание электронной плотности с частотой $\omega_{p_1, p_1'} = \frac{(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'})}{\hbar}$, где $\varepsilon_p = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Предположим, что в данный момент происходит увеличение электронной плотности (локальной). Тогда ионы начнут притягиваться к этому месту, и обладая большой массой, даже после компенсации избытка электронов, будут продолжать своё движение, т.е. локально произойдёт перекомпенсация, т.е. появится избыточный положительный заряд. Тогда второй электрон будет притягиваться к этому месту с перекомпенсированным увеличением электронной плотности, т.е. возникает эффективное притяжение. Оно может возникнуть только при условии синфазности колебаний решётки и электронной плотности и того, что $\omega_{p_1, p_1'} < \omega_D$.

Здесь первое слагаемое – кинетическая энергия электронов, отсчитанная от уровня Ферми, т.е. $\xi_p = p^2/2m - \mu$, где μ – химический потенциал, а H_I – записанное выше взаимодействие электронов через виртуальный обмен фононом. С учетом феномена Купера естественно для системы взаимодействующих электронов рассматривать редуцированный

гамильтониан H_p , где взаимодействие учтено лишь для пар с нулевым полным импульсом и спином. Тогда

$$H_p = \sum_{p\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} - g \sum_{p,p'} c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+ c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}$$

чему соответствует рассеяние



Волновую функцию основного состояния БКШ будем искать вариационным методом, причем в виде пробной возьмем

$$|\phi\rangle = \prod_p (u_p + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) |0\rangle, \text{ где } u_p \text{ и } v_p - \text{действительны, а } v_p - \text{амплитуда того, что}$$

«парное» состояние $(p\uparrow, -p\downarrow)$ занято, и u_p – амплитуда того, что оно свободно.

Тогда $u_p^2 + v_p^2 = 1$, и тогда v_p можно считать вариационным параметром.

3). Вычисление $\langle\phi|H_p|\phi\rangle$

Сделаем это отдельно для кинетической энергии и H_i в представлении чисел заполнения

$$\langle\phi|\sum_{p\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma}|\phi\rangle = \langle\phi|\sum_p \xi_p (c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow} + c_{p\downarrow}^+ c_{p\downarrow})|\phi\rangle = \sum_p \xi_p \{ \langle\phi|c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow} + c_{p\downarrow}^+ c_{p\downarrow}|\phi\rangle \}$$

Сначала вычислим

$$\langle\phi|\dots|\phi\rangle = \langle 0|\prod_{p=p'} (u_{p'} + v_{p'} c_{-p'\downarrow}^+ c_{p'\uparrow}^+) (c_{p'\uparrow}^+ c_{p'\uparrow}) \prod_{p=p''} (u_{p''} + v_{p''} c_{p''\uparrow}^+ c_{-p''\downarrow}^+) |0\rangle$$

Но удобнее сразу рассматривать $\langle\phi|\sum_{p\sigma} \xi_p n_{p\sigma}|\phi\rangle$, где

$$\sum_{p\sigma} n_{p\sigma} = [c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow} + c_{p\downarrow}^+ c_{p\downarrow} + c_{-p\uparrow}^+ c_{-p\uparrow} + c_{-p\downarrow}^+ c_{-p\downarrow}]. \text{ Тогда}$$

$$(u_p + v_p c_{-p\downarrow}^+ c_{p\uparrow}^+) [\dots] (\cancel{u_p} + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) = (u_p + v_p c_{-p\downarrow}^+ c_{p\uparrow}^+) v_p [c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow} + \cancel{c_{p\downarrow}^+ c_{p\downarrow}} + \cancel{c_{p\uparrow}^+ c_{-p\uparrow}} + c_{-p\downarrow}^+ c_{-p\downarrow}] \times \\ \times c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ = u_p v_p (c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow} + c_{-p\downarrow}^+ c_{-p\downarrow}) c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ + v_p^2 c_{-p\downarrow}^+ c_{p\uparrow}^+ (c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow} + c_{-p\downarrow}^+ c_{-p\downarrow}) c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+. \text{ Тогда}$$

$$\left. \begin{aligned} c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow} c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ &= c_{p\uparrow}^+ (1 - c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow}) c_{-p\downarrow}^+ = c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ \\ c_{-p\downarrow}^+ c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ &= -c_{-p\downarrow}^+ c_{p\uparrow}^+ (1 - c_{-p\downarrow}^+ c_{-p\downarrow}) = c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ \end{aligned} \right\} \text{итак } 2u_p v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+$$

$$\text{Остается еще } v_p^2 c_{-p\downarrow}^+ c_{p\uparrow}^+ (2c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) = 2v_p^2 (c_{-p\downarrow}^+ (1 - \cancel{c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow}}) c_{-p\downarrow}^+) = 2v_p^2$$

$$\text{Итак } \langle \varphi | \sum_p \left(\underbrace{2u_p v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+}_{\text{зачиляется}} + 2v_p^2 \right) \xi_p | \varphi \rangle = 2 \sum_p \xi_p v_p^2.$$

Вычислим

$$\langle \varphi | H_I | \varphi \rangle = \langle \varphi | -g \sum_{p,p'} \left(c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+ c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \right) | \varphi \rangle = \langle \varphi | -g \sum_{p'} \underbrace{c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+}_{\equiv B_{p'}} \sum_p \underbrace{c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}}_{\equiv A_p} | \varphi \rangle$$

$$\tilde{A}_p \equiv (u_p + v_p c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}) A_p (\cancel{u_p} + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) = v_p (u_p + v_p c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}) c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+. \text{ Но}$$

$$c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ = c_{-p\downarrow} \left(1 - \cancel{c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow}^+} \right) c_{-p\downarrow}^+ = c_{-p\downarrow} c_{-p\downarrow}^+ = 1 - \cancel{c_{p\downarrow}^+ c_{-p\downarrow}^+} = 1. \text{ Тогда}$$

$$\tilde{A}_p = u_p v_p + v_p^2 \cancel{c_{p\downarrow}^+ c_{p\uparrow}^+} = u_p v_p.$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{p'} &\equiv (u_{p'} + v_{p'} c_{-p'\downarrow} c_{p'\uparrow}) B_{p'} (u_{p'} + v_{p'} c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+) = u_{p'} (u_{p'} + v_{p'} c_{-p'\downarrow} c_{p'\uparrow}) c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+ + \\ &+ v_{p'} (u_{p'} + v_{p'} c_{-p'\downarrow} c_{p'\uparrow}) \underbrace{c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+ c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+}_{\neq 0} = u_{p'}^2 c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+ + u_{p'} v_{p'} \underbrace{c_{-p'\downarrow} c_{p'\uparrow}^+ c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+}_{=1} \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \tilde{B}_{p'} = u_{p'}^2 c_{p'\uparrow}^+ c_{-p'\downarrow}^+ + u_{p'} v_{p'}. \text{ Тогда } \langle \varphi | \sum_{p'} \tilde{B}_{p'} | \varphi \rangle = \sum_{p'} v_{p'} u_{p'},$$

$$\text{Окончательно } \boxed{\langle \varphi | H_I | \varphi \rangle = -g \sum_p u_p v_p \sum_{p'} u_{p'} v_{p'}} \text{ и}$$

$$\text{с } E_s = \boxed{\langle \varphi | H_p | \varphi \rangle = 2 \sum_p v_p^2 \xi_p - g \sum_p u_p v_p \sum_{p'} u_{p'} v_{p'}} \text{ где } u_p^2 + v_p^2 = 1$$

Вернемся к формуле $W_s \equiv E_s = 2 \sum_p v_p^2 \xi_p - g \sum_p u_p v_p \sum_{p'} u_{p'} v_{p'}$, с учетом того, что

$$\Delta_0 = g \sum_{p'} u_{p'} v_{p'} \text{ и } v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right). \text{ Тогда имеем}$$

$$E_s = \sum_p \xi_p \left(1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right) - \frac{\Delta_0^2}{g}.$$

Но нормальное состояние при $T=0$ соответствует тому, что $\Delta_0=0$ и тогда $E_p = |\xi_p|$, то есть $E_N = \sum_{|p| < p_F} 2\xi_p$, так как слагаемые с $|p| > p_F$ обращаются в нуль так как $E_p = \xi_p$ и $1 - \frac{\xi_p}{\xi_p} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } E_s - E_N &= \sum_{|p| > p_F} \left(\xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} \right) + \sum_{p < p_F} \left(+\xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} \right) - \frac{\Delta_0^2}{g} - \sum_{p < p_F} 2\xi_p = \\ &= \underbrace{\sum_{p > p_F} \left(\xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} \right)}_{\text{из-за симметрии}} + \underbrace{\sum_{p < p_F} \left(-\xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} \right)}_{\text{относительно } \varepsilon_F} - \frac{\Delta_0^2}{g} = 2 \underbrace{\sum_{p > p_F} \left(\xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} \right)}_{\text{изменение кинетической энергии}} - \underbrace{\frac{\Delta_0^2}{g}}_{\text{изменение потенциальной энергии}}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } E_s - E_N = 2 \sum_{p > p_F} \left(\xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} \right) - \frac{\Delta_0^2}{g}.$$

$$\text{и } 2 \sum_{p > p_F} \left(\xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} \right) = 2 \left[N(0) \int_0^{\theta_D} \xi d\xi - N(0) \int_0^{\theta_D} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}} \right] \approx \left[\frac{\Delta_0^2}{g} - \frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2 \right]$$

$$\text{Тогда. } E_s - E_N \approx -\frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2.$$

$$\text{Здесь мы учли, что } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| \quad (\text{Двайт, 202.1} - \sim \Delta_0^2/g)$$

Таблицы интегралов и другие математические формулы)

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_D} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}} &= \frac{\xi}{2} \sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2} \Big|_0^{\theta_D} = \frac{\theta_D}{2} \sqrt{\theta_D^2 + \Delta_0^2}, \\ \frac{\theta_D^2}{2} - \frac{\theta_D}{2} \sqrt{\theta_D^2 + \Delta_0^2} &= \frac{\theta_D}{2} \left[\theta_D - \sqrt{1 + \frac{\Delta_0^2}{\theta_D^2}} \right] \approx \frac{\theta_D}{2} \left[\chi - \left(\chi + \frac{1}{2} \frac{\Delta_0^2}{\theta_D^2} \right) \right] = -\frac{\Delta_0^2}{4} \\ E_s - E_N &\approx 2N(0) \left(-\frac{\Delta_0^2}{4} \right) = -\frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2. \end{aligned}$$

Итак, разность энергий сверхпроводящего и нормального состояний при $T=0$ оказывается отрицательной, то есть сверхпроводящее состояние оказывается более выгодным и будет реализовываться на опыте при $T=0$. Если вспомнить, что разность свободных энергий S и N фаз металла равна $H_{cm}^2/8\pi$, где $H_{cm}(T=0) = H_{cm}(0)$ есть критическое термодинамическое магнитное поле, то отсюда следует, что

$$H_{cm}^2(0)/8\pi = (1/2)N(0)\Delta_0^2,$$

то есть
$$H_{cm}(0) = \Delta_0 \sqrt{4\pi N(0)}.$$

Таким образом, величина $H_{cm}(0)$ выражена через параметры его электронного спектра ($N(0)$) и электрон-фононного взаимодействия (Δ_0).

Если считать, что в 1см^3 металла содержится $\sim 10^{22}$ электронов, а ширина зоны проводимости порядка 10 электрон-вольт, то есть $10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$, то плотность электронных состояний $N(0) \sim n/\varepsilon_F \sim 10^{22}/10^{-11} \sim 10^{33} 1/\text{эрг} \cdot \text{см}^3$. Если $\Delta_0 \ll \theta_D$ и $\Delta_0 \sim 10\text{K} \sim 10^{-15} \text{ эрг}$, то $H_{cm} \sim 100 \text{ зс}$.

Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника (Шмидт, § 38)

1. Энергетическая щель.

Это одно из важнейших понятий теории БКШ. Для его обсуждения рассмотрим какое-либо парное состояние $(\vec{p}, -\vec{p})$ электронов сверхпроводника в основном состоянии ($T=0$). Вычислим вклад w_p , который вносит в полную энергию сверхпроводника E_s эта пара. Так как

$$E_s = 2 \sum_p \xi_p \nu_p^2 - g \sum_{pp'} u_p \nu_p u_{p'} \nu_{p'},$$

то
$$w_p = 2\xi_p \nu_p^2 - 2g \nu_p u_p \sum_p u_p \nu_p.$$

Здесь первое слагаемое – это кинетическая энергия пары $(\vec{p}, -\vec{p})$, а второе слагаемое – вклад в отрицательную часть энергии основного состояния, следующий из того, что рассматриваемая пара участвует во всевозможных процессах взаимодействия, при которых она переходит в любые другие парные состояния $(\vec{p}', -\vec{p}')$ и, наоборот, когда любые другие пары переходят в исходное состояние. Множитель 2 во втором слагаемом появился потому, что пара $(\vec{p}, -\vec{p})$ в выражении для E_s встретится дважды – один раз при суммировании по p , а второй раз – по p' . Учтем теперь, что $\nu_p^2 = (1 - \xi_p/E_p)/2$, $\Delta_0 = g \sum_p u_p \nu_p$ и $u_p^2 \nu_p^2 = [1 - (\xi_p/E_p)^2]/4$, и тогда получим

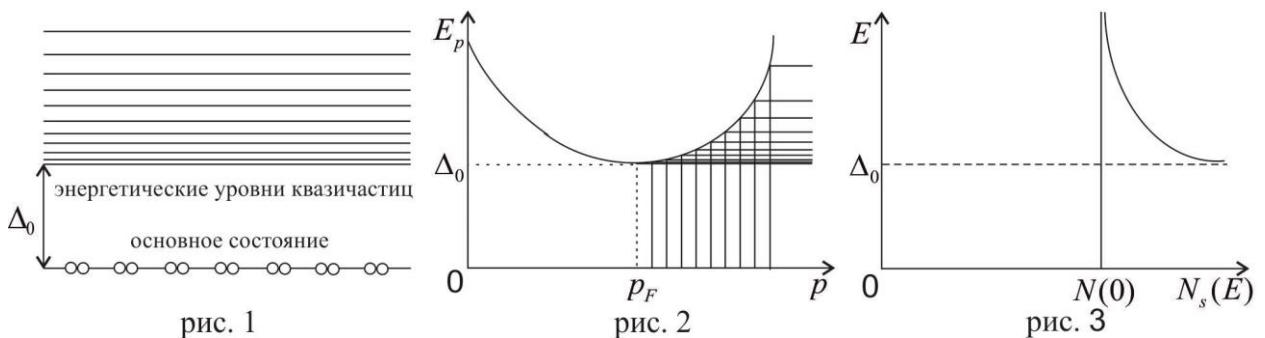
$$w_p = 2\xi_p \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_p}{E_p}\right) - 2\Delta_0 \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\xi_p^2}{E_p^2}} = \xi_p - \frac{\xi_p^2}{E_p} - \frac{\Delta_0^2}{E_p} = \xi_p - E_p.$$

Итак $w_p = \xi_p - E_p$.

Чтобы воспользоваться этой формулой, предположим, что в основном состоянии сверхпроводника пара состояний $(p, -p)$ заведомо пуста. Введем в такой сверхпроводник один внешний электрон и поместим его в состояние p и подсчитаем теперь полную энергию системы. Поскольку мы ввели дополнительный электрон в состояние p , то теперь пара состояний $(p, -p)$ не может участвовать в процессах рассеяния, то есть не может давать вклад в новую энергию основного состояния сверхпроводника W_p , то есть

$$W_p = E_s - w_p + \xi_p = E_s - \cancel{\xi_p} + E_p + \cancel{\xi_p} = E_s + E_p.$$

Этот добавленный неспаренный электрон мы будем называть элементарным возбуждением нашей системы, или «квазичастицей» («боголоном»). Итак, $W_p = E_s + E_p$, где $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta_0^2}$. Отсюда следует, что добавляя один электрон к сверхпроводнику в основном состоянии, мы повышаем энергию системы минимум на величину Δ_0 (если $\xi_p = 0$, то есть состояние p находится на поверхности Ферми). Это означает, что спектр элементарных возбуждений системы отделен от уровня энергии, соответствующего основному состоянию сверхпроводника энергетической щелью.



Рассмотрим теперь «возмущение» основного состояния сверхпроводника другим способом – не добавлением внешнего электрона, а воздействием какого-то внешнего возмущения на один из электронов пары $(p, -p)$, который переводится в соседнее состояние p' . Напомним, что в основном состоянии БКШ первоначально все p -ячейки были или попарно заполнены, или попарно пусты. Перевод одного из электронов пары $(p, -p)$ в соседнюю ячейку тогда означает появление уже двух неспаренных

(возбуждённых) электронов. На такой разрыв пары уже требуется энергия уже минимум $2\Delta_0$. Это схематически можно изобразить с помощью рис. 1. Все парные состояния сконцентрированы на энергетическом уровне, соответствующем основному состоянию сверхпроводника. Неспаренный электрон на этом уровне оказаться не может и должен занять (при $T=0$) первый незанятый уровень сверхпроводника элементарных возбуждений. При разрыве пары внешним (электромагнитным или акустическим) возбуждением оба электрона пары должны подняться на уровни спектра элементарных возбуждений, для чего должна быть затрачена энергия, большая $2\Delta_0$. Существование энергетической щели является очень важным свойством сверхпроводника и объясняет многие закономерности его поведения.

2. Плотность состояний квазичастиц сверхпроводника.

На рис. 2. схематически показана нижняя часть спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Используя формулу $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta_0^2}$, получим плотность состояний электронных возбуждений $N(E)$, где E - их энергия. По определению, плотность состояний, или число энергетических уровней, приходящихся на единичный интервал энергии и на 1 см^3 сверхпроводящего металла равна

$$N_s(E) = dv/dE,$$

где dv - число уровней в энергетическом интервале dE в окрестности уровня E . Если учесть, что $dv/d\xi = N(0)$ есть плотность состояний нормального металла вблизи уровня Ферми, то

$$N_s(E) = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dE} = N(0) \cdot \frac{1}{dE/d\xi} = N(0) \frac{E}{\xi} = N(0) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_0^2}}.$$

Из этой формулы следует, что плотность состояний элементарных возбуждений сверхпроводника $N_s(E) \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow \Delta_0$, смотри рис. 3.

3. Оценка длины когерентности из теории БКШ.

Вернемся к графику зависимости v_p^2 от p , имеющего форму Ферми-ступеньки с «размазкой» по энергии вблизи p_F порядка $2\Delta_0$. Соответственно, размазка по импульсам вблизи p_F будет равна $\delta p \approx p_F (2\Delta_0/\varepsilon_F)$, где $\varepsilon_F = p_F^2/2m = v_F p_F/2$. Но в силу соотношения неопределённости $\delta p \delta x \approx \hbar$. где

неопределённости по координате куперовской пары (точнее - по ее размеру в координатном пространстве) есть $\delta x \equiv \xi_0$, где ξ_0 – длина когерентности сверхпроводящего конденсата, то есть минимальный размер, на котором может изменяться параметр порядка сверхпроводника. Итак

$$\xi_0 \approx \hbar / \delta p = \hbar / p_F (2\Delta_0 / \varepsilon_F) = \hbar v_F / 4\Delta_0$$

Зависимость энергетической щели от температуры в теории БКШ

Энергетическая щель Δ уменьшается с повышением температуры T . Это следует из того, что для разрыва куперовской пары и создания двух квазичастиц требуется затратить энергию 2Δ . Если температура сверхпроводника $T \sim 2\Delta$, то под воздействием тепловых флуктуаций достаточно много куперовских пар будет разорвано и, соответственно, в $\vec{p}$ -пространстве много ячеек $(-p, p)$ будет заполнено одноэлектронными возбуждениями. Но это означает, что эти ячейки не будут участвовать во взаимных переходах пар, и, соответственно, не будут участвовать в понижении энергии спектра и в формировании щели, т.е. энергия сверхпроводника повысится. Таким образом, чем больше разорванных пар, тем больше квазичастиц и тем меньше щель.

Количественный анализ зависимости $\Delta(T)$ можно провести двумя методами. Один из них – по Шмидту – формально не строгий, но значительно более простой, чем строгий подход анализа возбуждений спектра в теории БКШ в терминах операторов Боголюбова-Валатина.

Изложим сначала анализ Шмидта. Здесь сразу постулируется, что вероятность заполнения состояния одиночным электроном, который рассматривается, как квазичастица с законом дисперсии $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2(T)}$, подчиняется статистике Ферми-Дирака и равна

$$f_p = \frac{1}{[\exp(E_p/T) + 1]}.$$

Отсюда следует, что $f_p \ll 1$ при $T \ll E_p$ и $f_p \simeq \frac{1}{2}$ при $T \gg E_p$. Если хотя бы одно из состояний (p) или $(-p)$ заполнено, то пара $(+p, -p)$ не может участвовать в создании сверхпроводимости. Вероятность этого равна $2f_p$,

откуда следует, что вероятность того, что пара $(-p, p)$ может участвовать в рассеяниях на других парах, равна $1 - 2f_p$.

Тогда полная энергия сверхпроводника при $T \neq 0$ будет иметь вид

$$W_s(T) = \sum_p 2|\xi_p|f_p + 2\sum_p \xi_p(1-2f_p)v_p^2 - g\sum_{pp'} u_p v_p u_{p'} v_{p'}(1-2f_p)(1-2f_{p'}) .$$

Здесь первое слагаемое-это кинетическая энергия квазичастиц, второе слагаемое-кинетическая энергия сверхпроводящих электронов, последнее слагаемое-энергия взаимодействия сверхпроводящих электронов через фононы, которая и приводит к созданию сверхпроводящего состояния. Последние два сомножителя в третьем слагаемом учитывают вероятность такого взаимодействия.

Плотность свободной энергии спектра равна $F_s = W_s - TS$, где S - энтропия, которая для квазичастиц зависит только от их числа. Величину v_p^2 , как и прежде для случая $T = 0$, определим из условия $\delta F_s = \partial F_s / \partial v_p \times \delta v_p = 0$, из которого следует, что фактически надо вычислить лишь $dW_s / dv_p = 0$. С учётом того, что теперь $\Delta(T) = g \sum_p u_p v_p (1 - 2f_p)$, получаем, как и прежде, что

$$2\xi_p v_p = \Delta(T) \frac{(1 - 2v_p^2)}{\sqrt{1 - v_p^2}}$$

Из этой формулы, как и при $T = 0$, следует уравнение для щели $\Delta(T)$

$$\Delta(T) = g \sum_p u_p v_p (1 - 2f_p) = \frac{g}{2} \sum_p \frac{\Delta(T)(1 - 2f_p)}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2(T)}} ,$$

Где $f_p = f_p(E_p/T)$, а $E_p^2 = \xi_p^2 + \Delta^2(T)$. Если учесть ещё, что $1 - f_p = th(E_p/2T)$, то переходя от суммирования по p к интегрированию по $d\xi$, по аналогии со случаем $T = 0$, получаем интегральное уравнение для $\Delta(T)$ в виде

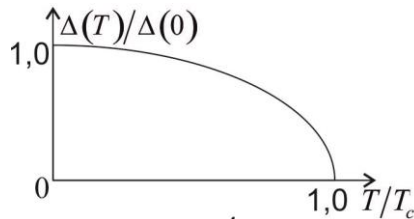


рис. 4

$$\frac{1}{N(0)g} = \int_0^{\theta_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2(T)}} th \frac{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2(T)}}{2T} .$$

Функция $\Delta(T)$, следующая из полученного уравнения, протабулирована в работе Мульшлегеля и её график изображен на рис.4. (рис.38.3 у Шмидта «Введение

в физику сверхпроводников», 1982 г., Изд. «Наука»). Вблизи T_c зависимость щели от T определяется формулой $\Delta \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$. Из уравнения для $\Delta(T)$ можно получить выражение для критической температуры T_c . Для этого положим в нем $T = T_c$ и $\Delta(T_c) = 0$. Тогда уравнение для T_c имеет вид

$$\frac{1}{N(0)g} = \int_0^{\theta_D} \frac{d\xi}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T_c}.$$

Вычисление этого интеграла в пределе слабой связи $\Delta_0 \ll \theta_D$ даёт

$$T_c = 1,14\theta_D \exp(-1/N(0)g).$$

Если учесть, что ранее мы получили $\Delta_0 = 2\theta_D \exp(-1/N(0)g)$, то отсюда следует, что

$$2\Delta_0 = 3,52T_c.$$

Для сверхпроводников со слабой связью это соотношение между $\Delta(0)$ и T_c находится в хорошем согласии с многочисленными экспериментальными данными.

Существенно, что формула для T_c дает объяснение изотоп-эффекта, который заключается в том, что критическая температура разных изотопов одного и того же сверхпроводящего элемента определяется эмпирической формулой $T_c \sqrt{M} = \text{const}$, где M - масса изотопа. Поскольку $\theta_D = \hbar \omega_D$ и $\omega_D \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$, то из формулы для T_c сразу следует изотоп-эффект.

Отметим ещё, что численный расчет $\Delta(T)$ с помощью вышеуказанных формул приводит к заключению, что $\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$ является почти универсальной функцией $\frac{T}{T_c}$ (см. рис...). Таулес (Thouless) в 1960 г. показал, что в пределе сильной связи (когда $T_c \leq \theta_D$) эта функция может быть представлена в простой форме

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = \operatorname{th} \left[\frac{T_c \Delta(T)}{T \Delta(0)} \right]$$

что согласуется со случаем слабой связи с точностью в пределах 0,1%.

Простая оценка $\int_0^{\frac{\theta_D}{2T_c}} \frac{dx}{x}$; Если $A \equiv \frac{\theta_D}{2T_c}$, то в пределе слабой связи $A \gg 1$,

$$\text{тогда } \int_0^A \frac{dx}{x} = \int_0^1 + \int_1^A = \int_0^1 dx + \int_1^A \frac{dx}{x} = 1 + \ln x \Big|_1^A = 1 + \ln A = \ln(eA).$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{N(0)g} \simeq \ln \left(e \frac{\theta_D}{2T_c} \right), \text{ т.е. } e^{\frac{1}{N(0)g}} \simeq \left(\frac{e}{2} \right) \left(\frac{\theta_D}{T_c} \right), \text{ откуда } T_c \simeq \left(\frac{e}{2} \right) \theta_D e^{-\frac{1}{N(0)g}},$$

сравни с точным результатом.

Операторы Боголюбова-Валатина

1. При обобщении результатов БКШ для $T = 0$ на случай конечных T удобно воспользоваться методом канонических преобразований Боголюбова, введя операторы $\gamma_{p\uparrow}^+$ и $\gamma_{p\downarrow}^+$ следующим образом:

$$\begin{cases} c_{p\uparrow}^+ = u_p \gamma_{p\uparrow}^+ + v_p \gamma_{-p\downarrow}^+ \\ c_{-p\downarrow} = u_p \gamma_{-p\downarrow} - v_p \gamma_{p\uparrow}^+ \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{p\uparrow}^+ = u_p c_{p\uparrow}^+ - v_p c_{-p\downarrow} \\ \gamma_{p\downarrow}^+ = u_p c_{p\downarrow}^+ + v_p c_{-p\uparrow} \end{cases}$$

Основное свойство этих операторов состоит в том, что введенная ранее волновая функция БКШ $|\phi\rangle = \prod_p (u_p + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) |0\rangle$ является вакуумом для операторов $\gamma_{p\uparrow}$ и $\gamma_{p\downarrow}$, т.е. $\gamma_{p\uparrow} |\phi\rangle = \gamma_{p\downarrow} |\phi\rangle = 0$. Проверим это:

$$2. \quad \gamma_{p\uparrow} |\phi\rangle = (u_p c_{p\uparrow} - v_p c_{-p\downarrow}^+) |\phi\rangle \sim (u_p c_{p\uparrow} - v_p c_{-p\downarrow}^+) (u_p + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) |0\rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (u_p c_{p\uparrow} - v_p c_{-p\downarrow}^+) (u_p + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) &= \cancel{u_p^2 c_{p\uparrow}^2} + u_p v_p c_{p\uparrow} c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+ - u_p v_p c_{-p\downarrow}^+ - \cancel{v_p^2 c_{-p\downarrow}^2 c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+} \\ &= u_p v_p (1 - \cancel{c_{p\uparrow}^+ c_{p\uparrow}}) c_{-p\downarrow}^+ - u_p v_p c_{-p\downarrow}^+ = 0. \end{aligned}$$

Итак, $(u_p c_{p\uparrow} - v_p c_{-p\downarrow}^+) (u_p + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+) |0\rangle = 0$, что и требовалось доказать.

3. Ситуация с $\gamma_{p\downarrow} |\phi\rangle = 0$ сложнее, т.к. в этом случае из $\prod_p$ надо выбрать

такой множитель, который занулит $\gamma_{p\downarrow} |\phi\rangle$. Именно,

$$\gamma_{p\downarrow} |\phi\rangle = (u_p c_{p\downarrow} + v_p c_{-p\uparrow}^+) |\phi\rangle \sim (u_p c_{p\downarrow} + v_p c_{-p\uparrow}^+) (u_p + v_p c_{-p\uparrow}^+ c_{p\downarrow}^+) |0\rangle.$$

$$\begin{aligned} (u_p c_{p\downarrow} + v_p c_{-p\uparrow}^+) (u_p + v_p c_{-p\uparrow}^+ c_{p\downarrow}^+) &= \cancel{u_p^2 c_{p\downarrow}^2} + u_p v_p c_{p\downarrow} c_{-p\uparrow}^+ c_{p\downarrow}^+ + u_p v_p c_{-p\uparrow}^+ + \cancel{v_p^2 c_{-p\uparrow}^2 c_{-p\uparrow}^+ c_{p\downarrow}^+} \\ \text{Тогда} \quad &= -u_p v_p c_{-p\uparrow}^+ (1 - \cancel{c_{p\downarrow}^+ c_{p\downarrow}}) - u_p v_p c_{-p\uparrow}^+ = 0. \end{aligned}$$

Итак, $(u_p c_{p\downarrow} + v_p c_{-p\uparrow}^+) (u_p + v_p c_{-p\uparrow}^+ c_{p\downarrow}^+) |0\rangle = 0$, что и требовалось доказать.

Возбужденные состояния в теории БКШ

1. Полный набор возбужденных состояний системы куперовских пар может быть построен с помощью операторов рождения квазичастиц $\gamma_{p\uparrow}^+$ и $\gamma_{p\downarrow}^+$, действующих на $|\varphi\rangle$. Именно

$$|n_{p_1\sigma_1} \dots n_{p_k\sigma_k}\rangle = \gamma_{p_1\sigma_1}^+ \dots \gamma_{p_k\sigma_k}^+ |\varphi\rangle,$$

где для операторов γ^+, γ сохраняются (как для операторов c^+c) фермионные соотношения антикоммутирующими. Если вычислять средние по возбужденным состояниям, то для энергии можно получить

$$E_s = 2 \sum_p \xi_p v_p^2 + \sum_p \xi_p (u_p^2 - v_p^2) (n_{p\uparrow} + n_{-p\downarrow}) - g \sum_{pp'} u_p v_p u_{p'} v_{p'} (1 - n_{p\uparrow} - n_{-p\downarrow}) (1 - n_{p'\uparrow} - n_{-p'\downarrow}),$$

где n есть числа заполнения возбужденных состояний $n_{p\uparrow}$ и $n_{p\downarrow}$.

2. В отличие от случая $T=0$, для определения v_p и $n_{p\sigma}$ нужно варьировать не просто E_s , а $F_s = E_s - TS$, т.е. свободную энергию, где S - энтропия фермионных возбуждений

$$S = - \sum_{p\sigma} [n_{p\sigma} \ln n_{p\sigma} \pm (1 \mp n_{p\sigma}) \ln(1 \mp n_{p\sigma})] \begin{cases} + \text{фермионы} \\ - \text{бозоны} \end{cases} \text{ Киттель, с.128,135, (19.25) .}$$

Вариация энтропии

$$\frac{dS}{dn} = - \sum [n \ln n \pm (1 \mp n) \ln(1 \mp n)]' \text{ где}$$

$$[]' = \ln n + n \frac{1}{n} \pm (\mp 1) \ln(1 \mp n) \pm (1 \mp n) \frac{\mp 1}{1 \mp n} = \ln n + \chi - \ln(1 \mp n) - \chi = \ln [n/(1 \mp n)]$$

$$\text{Тогда } \frac{dF_s}{dn} = \frac{dE_s}{dn} - T \frac{dS}{dn} = 0; \text{ Если } \frac{dE_s}{dn} = \varepsilon, \text{ то } \varepsilon = T \frac{dS}{dn},$$

$$\text{или } \frac{\varepsilon}{T} = \ln \frac{n}{1 \mp n}; \quad e^{\frac{\varepsilon}{T}} = n/(1 \mp n); \quad (1 \mp n) e^{\frac{\varepsilon}{T}} = n; \quad e^{\frac{\varepsilon}{T}} = \left(1 \pm e^{\frac{\varepsilon}{T}}\right) n \text{ или } \Delta_0;$$

$$\text{Окончательно: } n = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} \pm 1} \begin{cases} \text{фермионы} + \\ \text{бозоны} - \end{cases}$$

Квазичастицы в сверхпроводнике – электроны и дырки

1). В этом пункте мы уточним представление об электронных возбуждениях (квазичастицах) в сверхпроводниках, с которыми я познакомил

вас ранее. Начнем с нормального металла, основное состояние которого при $T = 0$ таково, что все свободные электроны металла заполняют все ячейки $\vec{p}$ - пространства внутри сферы Ферми, а все ячейки вне ее – свободны. Введем теперь в нормальный металл один дополнительный электрон. Он займет какую-то ячейку $\vec{p}$ в $\vec{p}$ - пространстве (где $p > p_F$, p_F - радиус сферы Ферми). Условимся отчитывать энергию от энергии Ферми $p_F^2/2m$. Тогда энергия всей системы увеличится на $\xi_p = (p^2 - p_F^2)/2m > 0$. Это и будет энергия элементарного возбуждения. Импульс же всей системы будет равен $\vec{p}$.

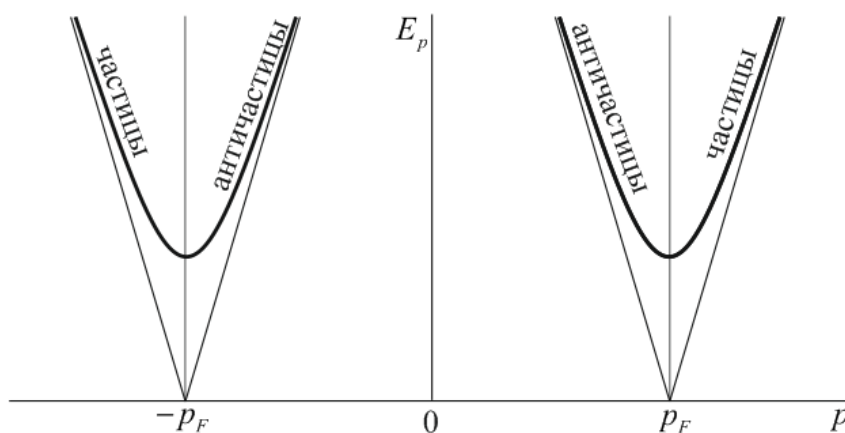
Снова рассмотрим основное состояние N - метала, удалив один электрон из ячейки $\vec{p} (p < p_F)$. Такое состояние можно также рассматривать как элементарное возбуждение системы, так как энергия этого состояния больше основного состояния оставшейся системы электронов $(N-1!)$ на величину $(p^2 - p_F^2)/2m > 0$. Действительно, основное состояние оставшихся электронов получится, если взять электрона с поверхности Ферми с $\varepsilon_{p_F} = p_F^2/2m$ и положить его в ячейку с $p < p_F$. Тогда энергия возбуждения будет > 0 , так как она будет равна $(\varepsilon_{p_F} - \varepsilon_p) > 0$. Импульс такой квазичастицы равен импульсу всей системы электронов то есть $-\vec{p}$, а заряд ее будет положительным (как у позитрона в теории Дирака).

2). В сверхпроводнике ситуация несколько сложнее. Ранее было показано что основное состояние сверхпроводника характеризуется функцией v_p^2 , которая имеет смысл вероятности заполнения электронами или парных ячеек $(p, -p)$. С учетом графика этой функции (смотри рис. ...) рассмотрим добавление одного элемента с импульсом p к основному состоянию системы. Соответствующая ячейка p может быть свободной как вне, так и внутри сферы Ферми, так как в основном состоянии некоторые ячейки с $p < p_F$ остаются пустыми. Итак, с сверхпроводнике электроноподобная (то есть добавленная) частица может иметь импульс p как больший p_F , так и меньший p_F .

Если же мы удалим из основного состояния один электрон с импульсом $-p$ то в сверхпроводнике появится один неспаренный электрон в ячейке p . Такая квазичастица ведет себя как античастица, но теперь p может быть как

больше, так и меньше p_F . Отсюда следует, что возбуждение в сверхпроводнике, когда ячейка (p) занята, а ячейка $(-p)$ - свободна, обладает свойствами как электрона (квазичастицы), так и дырки (античастицы). Все определяется вероятностью того или иного состояния. Образование античастицы должно быть пропорционально вероятности того, что ячейка p заполнена сверхпроводящим электроном, то есть величине ν_p^2 , а образование электрон-подобной квазичастицы - вероятности того, что ячейка свободна в основном состоянии, то есть величине $u_p^2 = 1 - \nu_p^2$.

Можно говорить, что в сверхпроводнике квазичастицы типа частицы (почти в чистом виде — это квазичастицы с импульсом p , если $|p - p_F|/p_F \gg \Delta/\varepsilon_F$, $p > p_F$. А почти в чистом виде античастицы, это квазичастицы с импульсом p удовлетворяющие тому же неравенству, но для $p < p_F$. На рис. ...показаны обе ветви спектра квазичастиц — для частиц и античастицы — жирными линиями. Тонкими линиями показан спектр нормального металла.



Скорость распространения квазичастиц в координатном пространстве равна групповой скорости, которая равна

$$\vec{v}_p = \frac{\partial E_p}{\partial \vec{p}},$$

$$v_p = \partial E_p / \partial p = \xi (\partial \xi / \partial p) / E_p.$$

Рис.

Поэтому для $p > 0$ античастицы движутся налево, а частицы - направо.

3). Заряд квазичастицы в сверхпроводнике

В предыдущем пункте было показано, что квазичастица в сверхпроводнике есть элементарное возбуждение, которое является в определённой степени частицей или античастицей, причем переход от одного состояния к другому происходит непрерывно при изменении импульса. Если вспомнить, что в нормальном металле заряды частиц и античастиц имеют

противоположные знаки , то для сверхпроводника приходится считать что величина заряда квазичастицы будет непрерывно изменяться , если двигаться по кривой спектра возбуждений. Для простоты будем считать заряд электрона равным +1 и в дальнейшем все заряды будем измерять в относительных единицах, приняв за единицу заряд электрона.

Рассмотрим теперь сверхпроводник при конечной температуре ($T > 0$), когда имеются как спаренные, так и возбуждённые электроны. Последние распределены по ячейкам p - пространства согласно функции распределения f_p , которая является вероятностью того, что квазичастица (возбуждённый электрон) занимает ячейку p . Поскольку вероятность того, что она до этого не была занята куперовской парой есть u_p^2 , то полная вероятность обнаружить квазичастицу в ячейке p есть $f_p u_p^2$. С другой стороны, эта ячейка p может быть заполнена электроном из куперовской пары. Для этого должны быть выполнены два условия: а) в этой ячейке нет квазичастицы – и вероятность этого есть $1 - f_p$ и б) здесь есть электрон из куперовской пары – возможность этого есть v_p^2 . Тогда полная вероятность обнаружить в ячейке p электрон, принадлежащий конденсату куперовской пары есть $(1 - f_p) v_p^2$. Поэтому полный заряд, находящийся в ячейке p , равен $f_p u_p^2 + (1 - f_p) v_p^2$. Тогда полный заряд всех электронов сверхпроводника равен

$$Q = \sum_p f_p u_p^2 + \sum_p (1 - f_p) v_p^2.$$

Пусть в результате какого либо внешнего воздействия изменилось как распределение квазичастиц (на величину δf_p), так и распределение сверхпроводящих электронов (на величину δv_p^2). В результате изменения δQ полного заряда сверхпроводника произойдет на величину

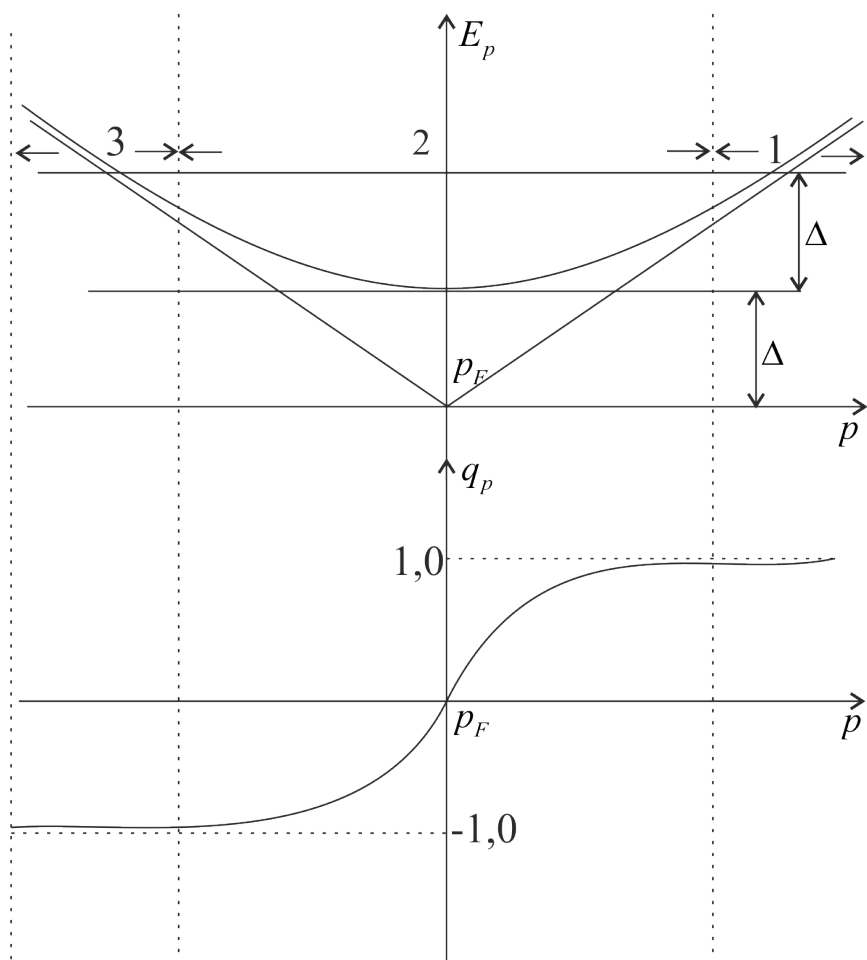
$$\delta Q = \sum_p \delta (f_p u_p^2) + \delta [(1 - f_p) v_p^2] = \sum_p (u_p^2 - v_p^2) \delta f_p + \sum_p (1 - 2f_p) \delta v_p^2.$$

Здесь первое слагаемое есть изменение полного заряда всех квазичастиц, тогда как каждое слагаемое суммы по p есть произведение изменения вероятности δf_p пребывания квазичастицы в ячейке p и заряда $q_p \equiv u_p^2 - v_p^2$ этой ячейки. Если учесть, что $u_p^2 = (1/2)(1 + \xi_p/E_p)$ и $v_p^2 = (1/2)(1 - \xi_p/E_p)$, то тогда

$$q_p = \xi_p / E_p = \xi_p / \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}.$$

Зависимость q_p от p изображена на рис. ... Итак, мы получим, что заряд частицы может принимать любую величину между +1 (чистая частица) -1 (чистая античастица) в зависимости от того какова величина p по сравнению с p_F (то есть от расположения ячейки p).

Рассмотрим подробнее механизм изменения заряда квазичастицы после размещения одного избыточного электрона в ячейку p . Сверхпроводник в целом получил заряд +1, а в ячейке оказался заряд q_p . Можно спросить, куда делся заряд $(1 - q_p)$, если полный заряд должен сохраниться. Ответ состоит в том, что заряд $1 - q_p$ ушел к сверхпроводящим электронам и их заряд при этом увеличился. Каков механизм такого перехода? Если электрон вносится в сверхпроводник в ячейку p , то он может забрать себе парный электрон, принадлежащий конденсату куперовских пар, из ячейки $-p$, и эта пара попадает в конденсат, а электрон в ячейке p оказывается без партнёра, то есть образуется квазичастица (частица или античастица). Таким образом между квазичастицами и конденсатом в сверхпроводнике существует теснейшая связь и при установлении равновесия их нельзя рассматривать как независимые (что делалось нами ранее в двухжидкостной модели). При переходах квазичастиц из одних ячеек в p – пространстве в другие меняется как их заряд, так и заряд конденсата, то есть число электронов в нем.



Энергетический спектр квазичастиц E_p и их заряд q_p . В области 1 заряд квазичастиц близок к +1, а в области 3 - к -1. В области 2 заряд принимает любые значения от +1 до -1.

Рис.

Невзаимодействующие фермионы- введение квазичастиц.

1) У Дирака, стр. 378

Волновое уравнение для электронов допускает вдвое больше решений, причем половина из них относится к состояниям с отрицательной кинетической энергией (начало § 73).... Вывод : соответствующие отрицательные кинетические энергии относятся к новому сорту частиц имеющих массу электрона и противоположный заряд – позитронам (есть на опыте).

Однако неверно, что позитрон имеет отрицательную кинетическую энергию. Строить теорию позитрона надо иначе. Введем предположение , что почти все состояния с отрицательной энергией заняты, причем в каждом имеется один электрон. Незанятое состояние с отрицательной энергией будет выглядеть как некоторое состояние с положительной энергией , так как для того , что бы уничтожить его, то есть заполнить, мы должны добавить к нему

электрон с отрицательной энергией. Мы предположим, что незанятые состояния с отрицательной энергией будут позитронами.

Таким образом каждое занятое состояние с энергией > 0 будет иметь заряд $-e$, а каждое незанятое состояние с энергией < 0 – заряд $+e$.

Благодаря принципу Паули электрон с энергией $\varepsilon > 0$ удерживается обычно от перехода в состояние с $\varepsilon < 0$. Однако возможен еще переход такого электрона в незанятое состояние с $\varepsilon < 0$. В этом случае происходит исчезновение электрона и позитрона (аннигиляция) с испусканием излучения – и наоборот.

2) Abrikosov, стр 24-25; с 295.

Две точки зрения : ферми-газа и квазичастиц

а) газовый подход : $f(\varepsilon) = 1 / [e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1]$. При $T = 0$ все состояния с $p < p_F$ заняты, а с $p > p_F$ – свободны.

Если $T \neq 0$, то появляются возбужденные электроны. Размазка Ферми-ступеньки $\sim T$. Равновесное состояние системы и вообще любое возбужденное состояние может быть получено из состояния при $T = 0$ путем последовательного перемещения частиц изнутри Ферми-сферы наружу. При каждом таком акте создаются частица снаружи сферы и античастица внутри сферы («дырка»).

б) Эти частицы и античастицы являются квазичастицами возбуждённого состояния и их энергии надо отсчитывать от уровня Ферми $\mu(0)$. Существенно, что энергия квазичастицы и античастицы положительны, то есть

$$\xi_c = v_F (p - p_F) > 0 \text{ и } \xi_a \approx v_F (p_F - p) > 0.$$

Эти формулы для энергетического спектра квазичастиц могут быть записаны единым образом в виде $\xi_{\kappa\sigma} = |\xi|$, $\xi = \varepsilon(\vec{p}) - \mu$.

При этом надо помнить, что античастицы имеют заряд и импульс противоположный заряду и импульсу частиц.

Abrikosov, стр. 295. С помощью операторов c_p и c_p^+ можно записать гамильтониан системы взаимодействующих электронов. При этом речь идет о квазичастицах электронной жидкости.

В нормальном металле мы пользовались двумя отношениями: квазичастицами с энергетическим спектром $\varepsilon_{\text{кв}} = |\xi|$ и газовой моделью. Различие между этими моделями заключается, в частности, в том, что первой задан химический потенциал, тогда как во второй задано полное число частиц. С учетом того, что $T_{\text{пл}} \ll \varepsilon_F$, где $T_{\text{пл}}$ - температура плавления металла, изменение при p $T < T_{\text{пл}}$ незначительно, так что оба описания являются практически эквивалентными.

В сверхпроводящем металле гораздо удобнее пользоваться картиной квазичастиц, и это тоже соответствует заданию химического потенциала. При заданном химическом потенциале роль гамильтониана играет $\mathcal{H} - \mu N$, где N - оператор полного числа частиц. Фактически это сводится к замене энергии электрона на $\xi = \varepsilon - \mu$, то есть к сдвигу начала отчета энергии. Именно такой гамильтониан будет использован для определения энергетического спектра квазичастиц.

В предыдущих лекциях о теории БКШ я рассказывал о термодинамически равновесной теории. Иными словами, куперовские пары, электронные возбуждения (квазичастицы) и фононы находились в тепловом равновесии. В этом варианте теории можно вычислить теплоемкость и влияние постоянного магнитного поля на сверхпроводник. Поведение сверхпроводника значительно разнообразнее, если его равновесие нарушить, например, изучать его теплопроводность, электропроводность относительно переменного тока и СВЧ, поглощение звука и т.д.

Мы рассмотрим ряд случаев, когда неравновесное состояние сверхпроводника становится определяющим для понимания протекающих в нем физических явлений. В последующих лекциях я остановлюсь на ряде эффектов неравновесной сверхпроводимости, допускающих сравнительно элементарное их рассмотрение.

Андреевское отражение

Рассмотрим процессы, происходящие на границе нормальный металл – сверхпроводник (NS - граница) при протекании через нее постоянного тока. Очевидно, что далеко от границы в нормальном металле ток является нормальным (то есть простейшем случае подчиняется закону Ома), а далеко

от границы в сверхпроводящем металле ток является сверхпроводящим, то есть недиссипативным. Нас будет интересовать то, насколько далеко от NS - границы происходит процесс преобразования нормального тока в сверхток.

Понятие NS - границы в наиболее чистом виде возникает при рассмотрении такой границы в промежуточном состоянии проводника, когда химические потенциалы N и S фаз одного и того же металла одинаковы. Параметр порядка S – фазы – щель $\Delta(T, x)$ – будет иметь максимальное значение $\Delta(T)$ в глубине сверхпроводника и равна нулю в глубине N – фазы. Переход от одного значения к другому происходит на длине когерентности $\xi(T)$. Эту переходную область мы и будем называть NS - границей. Если $T \approx T_c$, то ширина границы достаточно велика, так как $\xi(T) \approx \xi(0)/\sqrt{T_c - T}$, где $\xi(0) = \xi(T = 0)$.

Рассмотрим теперь, как отдельный электрон из нормального металла переходит в сверхпроводник. Если его энергия меньше Δ , то он не сможет найти себе партнера в сверхпроводнике (энергия которых больше Δ) и тогда электрон должен отразиться от границы. Такое отражение происходит весьма своеобразно и описать его наиболее удобно на языке квазичастиц.

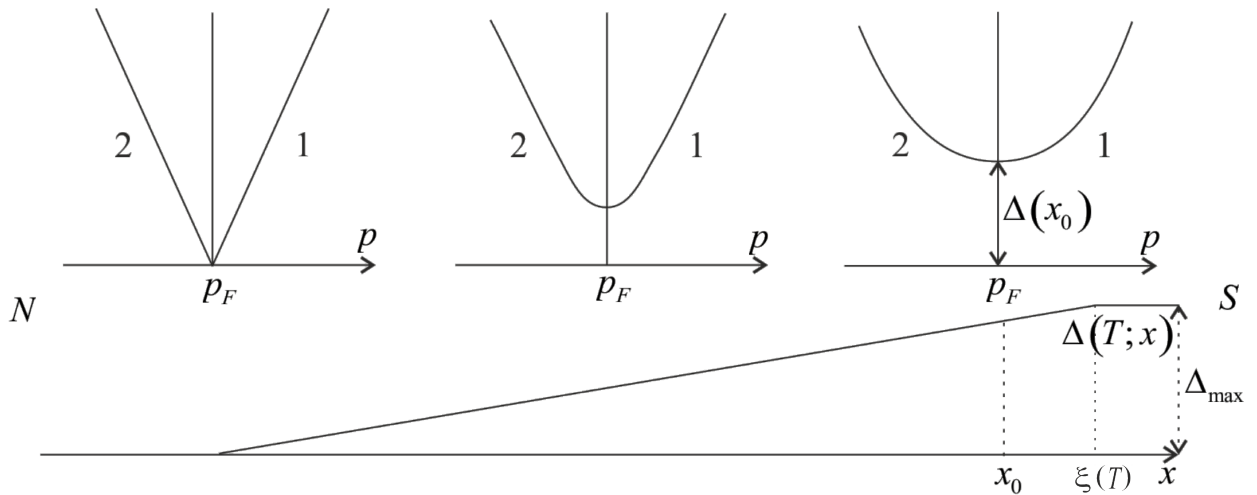


Рис. ...

По мере приближения к сверхпроводящей области в направлении оси x , где $\Delta(x)$ монотонно возрастает, электрон из N – металла постепенно проходит области, где щель $\Delta(x)$ постепенно возрастает. При этом он становится электроноподобной квазичастицей сверхпроводника, закон дисперсии которой есть $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$, и по мере движения вглубь сверхпроводника его

импульс уменьшается, все более приближаясь к p_F . Такое приближение по ветви 1 энергетического спектра приводит, как было показано ранее, к уменьшению заряда квазичастицы. Из рис. ... следует, что дойдя до точки x_0 , в которой величина щели $\Delta(x)$ равна энергии квазичастицы, последняя будет иметь импульс, равный p_F , нулевой заряд q_p и нулевую групповую скорость. В этой точке квазичастица отражается от сверхпроводника и переходит на левую часть спектра квазичастиц (ветвь 2 на рис. ...), то есть становится античастицей. Ее групповая скорость будет направлена в обратную сторону, то есть от сверхпроводника к N металлу, а заряд уже будет отрицательный. Но движение отрицательного заряда влево по оси x эквивалентно движению положительного заряда вправо по оси x . Поэтому рассмотренное отражение приводит к переносу заряда из N – металла в S – металл, то есть к прохождению электрического тока. Этот процесс впервые был теоретически рассмотрен А. Ф. Андреевым [] и поэтому называется андреевским отражением.

При таком отражении должна сохраняться энергия квазичастицы $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$, и изменяется направление импульса. Величина его изменения δp оценивается так: она будет порядка dp/dt , умноженной на время прохождения области от $\Delta(x)=0$ до $\Delta(x=x_0)$, то есть ξ_0/v . Так как $dp/dt \sim f$, где $f = -dU/dx$ есть действующая сила, то $f \sim \Delta/\xi_0$ (считая что $U(x) \sim \Delta(x)$). Тогда

$$\delta p \sim (\xi_0/v_F)(\Delta/\xi_0) \sim \Delta/v_F \sim p_F (\Delta/p_F v_F) \sim p_F (\Delta/\varepsilon_F) \ll p_F,$$

То есть изменение импульса квазичастицы значительно меньше самого импульса. Итак, при таком отражении частица превращается в античастицу, энергия и импульс сохраняется, а скорость изменяет знак. Такое отражение совершенно отлично от обычного зеркального отражения электронов, где изменяет знак лишь нормальная компонента скорости электронов по отношению к границе. Специфика андреевского отражения связана с медленностью изменения потенциала, роль которого играет Δ .

Уменьшение заряда квазичастицы по мере ее приближения к сверхпроводящей области свидетельствует о том, что и конденсат оказывается вовлеченным в процесс андреевского отражения. Физически это означает, что налетающая квазичастица находит себе парную частицу и в виде куперовской

пары переходит в конденсат, а образовавшаяся античастица возвращается в нормальный металл. Таким способом в области размером $\xi_0(T)$ происходит переход через NS - границу той части электрического тока, который переносится квазичастицами с энергией, меньшей щели $\Delta(T)$. Совсем иначе будут вести себя квазичастицы с энергией $E_p > \Delta(T)$. Далее будет показано, что они могут, проникать внутрь сверхпроводника на расстояния, значительно превышающие длину $\xi_0(T)$.

Итак, налетающая на границу частица находит себе парную частицу и вместе с ней переходит в конденсат, а образовавшаяся при отражении античастица возвращается в нормальный металл.

Для частиц с $E_p > \Delta$, оказывается, только часть заряда переходит в сверхпроводник в виде тока квазичастиц, а оставшаяся часть уходит в конденсат. Иными словами, для частиц с $E_p > \Delta$ вероятность андреевского отражения не равна нулю и меньше единицы до тех пор, пока их спектр отличается от спектра возбуждений в нормальном металле. Вычислим эту вероятность.

Пусть электрон с импульсом $p^+ = \hbar q^+$ и энергией $E > \Delta$ налетает на NS – границу со стороны нормального металла (так что его волновая функция есть $\Psi_{nad} = e^{iq^+x}$) и с вероятностью $a^2 < 1$ (где a – амплитуда) отражается в виде античастицы. Тогда отраженная волна имеет вид $\Psi_{omp} = ae^{iq^-x}$, где $q^\pm = \sqrt{2m(E_F \pm E)}/\hbar \approx p_F/\hbar$. Прошедшая же с вероятностью $b^2 = 1 - a^2$ в сверхпроводнике квазичастица имеет компоненты и как частица с волновой функцией $\Psi_{прои}^c = bue^{ik^+x}$, и как античастица с $\Psi_{прои}^a = bve^{ik^+x}$; обе эти компоненты можно записать как

$$\Psi_{прои} = b \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{ik^+x}.$$

В этой же двух компонентной форме падающая и отраженная волновые функции имеют вид

$$\Psi_{nad} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iq^+x}; \quad \Psi_{omp} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iq^-x}.$$

Учитывая, что все импульсы близки к $p_F = \hbar k_F$ и приравнивая амплитуды частиц и античастиц справа и слева от NS – границы, получим

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $b=1/u$ и $a=v/u$. Тогда вероятность андреевского отражения $A(E)$ равна

$$A(E) = \begin{cases} a^2 = (v/u)^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - \Delta^2}}{E + \sqrt{E^2 - \Delta^2}} = \frac{E - |\xi|}{E + |\xi|} & \text{для } E \geq \Delta \\ 1 & \text{для } E < \Delta. \end{cases}$$

Разбаланс заселённостей спектра квазичастиц и электрическое поле в сверхпроводнике (Шмидт, §46)

В условиях равновесия при $T > 0$ обе ветви спектра квазичастиц (частиц и античастиц, смотри рис. ...) заполнены квазичастицами симметрично, то есть число частиц и античастиц равны и их суммарный заряд равен нулю. Это следует из того, что функция распределения квазичастиц в равновесном сверхпроводнике есть функция Ферми

$$f_p = [\exp(E_p/T) + 1]^{-1}.$$

В результате различных внешних воздействий равновесное распределение квазичастиц может нарушаться и их функция распределения уже не будет равновесной. Рассмотрим случай, когда равновесие нарушено вблизи границы сверхпроводника с нормальным металлом, если оттуда идет поток электронов. В этом случае электроны с энергией, $E_p > \Delta(T)$ проникают в сверхпроводник и занимают p - ячейки, принадлежащие ветви спектра (1) на рис. ..., то есть спектра частиц с $p > p_F$. Тогда возникает разбаланс заселенностей ветвей 1 и 2 спектра частиц.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каковы последствия такого разбаланса и как и на каких расстояниях он релаксирует (так как далеко от границы этот разбаланс отсутствует). Очевидно, что существование разбаланса заселенностей ветвей спектра приводит к появлению конечного заряда квазичастиц $Q(x)$ в месте существования разбаланса x вида $Q(x) = \sum_p q_p(x) f_p(x)$, где $f_p(x)$ - уже неравновесная функция распределения квазичастиц по p - ячейкам. Но в силу электронейтральности металла,

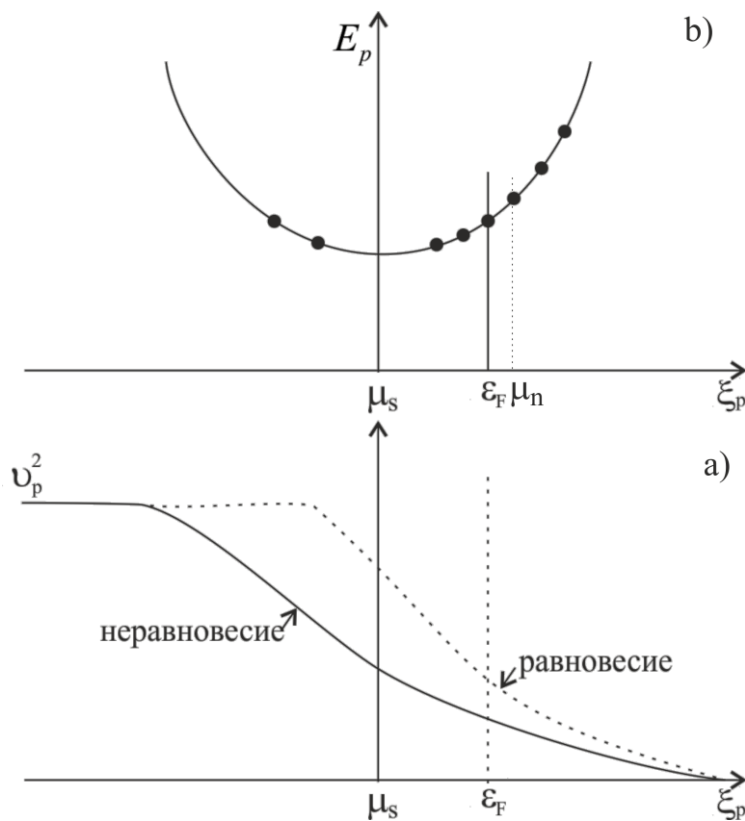


Рис. ...

электронов v_p^2 , так и спектр квазичастиц в неравновесном состоянии – рис. ...b).

Штриховой линией на рис. ...a) показано равновесное распределение v_p^2 , когда $Q = 0$ и когда химический потенциал конденсата куперовских пар μ_s совпадает с энергией Ферми ϵ_F . Отметим здесь, что функция распределения конденсатных электронов в неравновесном случае тоже будет иметь вид $v_p^2(x) = (1 - \xi_p/E_p)/2$, но $\xi_p = \epsilon_F - \mu_s$ и $E_p = (\xi_p^2 + \Delta^2)^{1/2}$, то есть считается, что конденсат успевает подстроиться под данное на рис. ...b) неравновесное асимметричное распределение квазичастиц. Можно показать,

что такая асимметрия заселенности ветвей спектра не изменяет величину Δ .
Так

как площадь под кривой ν_p^2 пропорциональна числу сверхпроводящих электронов, их уменьшение вызовет смещение границы распределения влево, то есть уменьшение химического потенциала $\delta\mu$ на величину $\varepsilon_F - \mu_s$. Новое распределение ν_p^2 показано на рис. ...а) сплошной линией. Соответственно, количество энергетических уровней, освободившихся от сверхпроводящих электронов равно $2N(0)(\varepsilon_F - \mu_s)$, где $2N(0)$ - плотность состояний на уровне Ферми с учетом двух значений спина у куперовской пары. Отсюда следует, что конденсат потерял заряд

$$Q = 2N(0)(\varepsilon_F - \mu_s),$$

который перешел к квазичастицам. В этой формуле как Q , так и μ являются функциями координаты x . Последнее означает, что в сверхпроводнике возможно существование статического, зависящего от координаты x электрического поля $E(x)$, которое не будет ускорять конденсат. Действительно, уравнение движения для сверхпроводящего электрона имеет вид

$$m\dot{\vec{v}}_s = -(e/c)\dot{\vec{A}} - e\nabla\varphi - \nabla\mu_s,$$

где e и m - заряд и масса электрона, соответственно, $\vec{v}_s$ - скорость сверхтекучего конденсата, φ - электростатический потенциал, $\vec{A}$ - векторный потенциал, точка – дифференцирование по времени. В стационарных условиях $\dot{\vec{v}}_s = \dot{\vec{A}} = 0$ и сверхпроводящие электроны не ускоряются. И тогда $\nabla(e\varphi + \mu_s) = 0$, то есть электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов $e\varphi + \mu_s = \text{const}$. Так как $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то имеем также $\vec{E} = +\nabla\mu_s/e$. Но из предыдущего $\nabla Q = -2N(0)\nabla\mu_s = -2eN(0)\nabla\mu_s/e = -2eN(0)\vec{E}$. Окончательно,

$$\vec{E} = -(1/2eN(0))\nabla Q.$$

Отсюда следует, что в неравновесных условиях при наличии градиента заряда квазичастиц сверхпроводника в нем возникает электрическое поле, которое, однако, не ускоряет конденсат, так как оно компенсируется градиентом химического потенциала сверхпроводящих электронов. Ситуация

аналогична существованию поля $\vec{E}(x)$ в неоднородном по составу проводнике за счет наличия $\nabla\mu$ (при отсутствии тока).

В сверхпроводнике же существование в данном месте стационарного, но неравновесного заряда квазичастиц с плотностью $Q(x)$ означает, что в это место непрерывно идет поток квазичастиц, приносящих определённый заряд, который там релаксирует, переходя в конденсат. Тогда из уравнения непрерывности для заряда следует, что

$$\text{div} \vec{j}_n = -eQ/\tau_0,$$

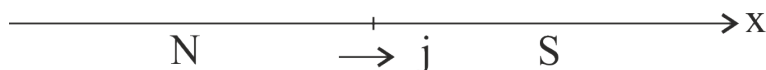
где $\vec{j}_n$ - нормальная компонента полного тока. Оказывается, что это соотношение справедливо лишь приближенно, когда $\Delta(T) \ll T_c$, то есть когда $T \approx T_c$. В этом же приближении можно пренебречь изменением химического потенциала квазичастиц μ_n по сравнению с изменением химического потенциала сверхпроводящих электронов, то есть считать что $\varepsilon_F - \mu_s \gg \mu_n - \varepsilon_F$ (смотри рис. ...b)). Действительно, при $\Delta(T) \ll T_c$ сверхпроводящих электронов в конденсате мало, тогда как число нормальных электронов велико. Поэтому удаление некоторого количества электронов из конденсата в подсистему нормальных электронов приводит к значительно большому изменению свойств конденсата (уменьшению μ_s), чем свойств нормальных электронов. С учетом этого закон Ома для возбуждений может быть записан в обычной форме

$$\vec{j}_n = \sigma \vec{E},$$

где $\sigma = 2N(0)e^2D$ есть остаточная проводимость, а $D = l v_F/3$ - коэффициент диффузии при рассеянии электронов с длиной свободного пробега l . Беря дивергенцию от $\vec{j}_n$ и $\vec{E}$ с учетом закона Ома и предыдущих формул имеем

$$\nabla^2 Q = Q/\lambda_Q^2,$$

где $\lambda_Q^2 = D\tau_0$. Рассмотрим теперь самый простой случай одномерной сверхпроводящей нити в контакте при $x=0$ с нормальным металлом.



Тогда уравнение для определения $Q(x)$ будет $d^2Q/dx^2 = Q/\lambda_Q^2$, а его решение есть $Q(x) = Q_0 \exp(-x/\lambda_Q)$, где $Q_0 = Q(x=0)$. Электрическое поле, возникающее в сверхпроводнике согласно связи E и ∇Q , будет

$$E = E_0 \exp(-x/\lambda_Q),$$

где $E_0 = E(x=0)$. Так как при $T \approx T_c$ можно пренебречь андреевским отражением, то E_0 - поле на границе - будет равно электрическому полю в нормальном металле, то есть при $x < 0$. Отсюда следует, что λ_Q имеет смысл глубины проникновения электрического поля в сверхпроводник, так как оно экспоненциально затухает на расстоянии λ_Q от границы. Рассмотрим еще температурную зависимость $\lambda_Q(T)$ вблизи $T \approx T_c$. Поскольку $\lambda_Q \sim \sqrt{\tau_Q}$, а $\tau_Q \sim 1/\Delta$, где $\Delta \sim (1-T/T_c)^{1/2}$, то

$$\lambda_Q \sim (1-T/T_c)^{-1/4},$$

то есть λ_Q расходуется при $T \rightarrow T_c$. Таким образом, при достаточной близости к критической температуре электрическое поле может проникать в сверхпроводник на большое расстояние. Если $\tau_Q \sim 10^{-9} \div 10^{-10}$ сек и $v_F \sim 10^8$ см/сек, то для $l \sim 10^{-5}$ см имеем $\lambda_Q \sim 1 \div 10$ мкм, так что λ_Q может быть больше всех характерных длин сверхпроводника при $T=0$. В частности, возможно получить $\lambda_Q \gg \xi_0(T)$, где $\xi_0(T)$ - корреляционная длина.

Подведем итог этого раздела. Если через границу между N и S металлами течет постоянный электрический ток, то в сверхпроводнике возникает электрическое поле. Экспоненциально затухающее от границы в глубину сверхпроводника на расстоянии λ_Q , которое может быть макроскопический большим, если T не очень близка к T_c . В области существования электрического поля дивергенция нормального тока отлична от нуля. Но так как дивергенция полного тока $\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_s$ должна быть равна нулю, то $\text{div} \vec{j}_n = -\text{div} \vec{j}_s$, то есть в области сверхпроводника с характерной длиной λ_Q происходит преобразование нормального тока в сверхпроводящий ток. Иными словами, в неравновесной области проникновение электрического поля с $\mu_n > \mu_s$, идет «химическая реакция» по превращению вещества с химическим потенциалом μ_n в вещество с химическим потенциалом μ_s .

Отметим еще, что все рассмотрение в этом разделе относилось к случаю, когда поток электронов идет из нормального металла в сверхпроводник. В картине квазичастиц этому потоку соответствовал поток «частиц». При перемене направления тока возникает симметричная картина, но с движением «античастиц», то есть разбаланс заряда квазичастиц сверхпроводника в области размером λ_Q около границы теперь такой, что заселенность ветви спектра «античастиц» больше, чем «частиц».

Избыточное сопротивление NS-границы (Шмидт В.В. п. 47, изд. «Наука», 1982 г.)

Если через границу сверхпроводника с нормальным металлом течёт электрический ток, то появляется избыточное электрическое сопротивление такой границы. Это является проявлением неравновесных процессов возникающих в сверхпроводнике на NS-границе и рассмотренных нами ранее. Действительно, поток электронов идёт из нормального металла в сверхпроводник S . Тогда те электроны в N , энергия которых меньше щели $\Delta(T)$ в S , отразятся по-андреевски и их ток станет током куперовских пар в S . Такое отражение произойдёт на расстоянии $\xi(T)$ от границы и вклад в электросопротивление этого процесса будет нулевым. Иная ситуация будет для тех электронов в N , энергия которых больше щели $\Delta(T)$, так как они, попадая в сверхпроводник, оказываются как квазичастицы на ветви спектра «частиц». Как было показано ранее, это приводит к появлению разбаланса заряда квазичастиц $Q(x)$ и появлению электрического поля $E(x)$, которое затухает на расстоянии λ_a вглубь сверхпроводника. Но существование электрического поля в области λ_a сверхпроводника вблизи NS-границы означает, что эта область даёт вклад в общее падение напряжения, то есть в полное сопротивление цепи. Этот вклад и будет избыточным сопротивлением NS-границы. Если бы все электроны, переносящие ток, давали вклад в диссипацию под действием поля $E(x)$, то избыточное сопротивление было бы равно

$$R_{NS} = \rho \lambda_Q / S,$$

где ρ - удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии, а S - площадь его поперечного сечения.

Следует, однако, учесть, что не все электроны ускоряются под воздействием поля $E(x)$ в NS - области. Например, электроны конденсата не ускоряются под действием поля E , т.к. действие поля E на куперовские пары в точности компенсируется действием градиента химического потенциала сверхпроводящих электронов $\nabla\mu_s$. Аналогично не ускоряются все электроны

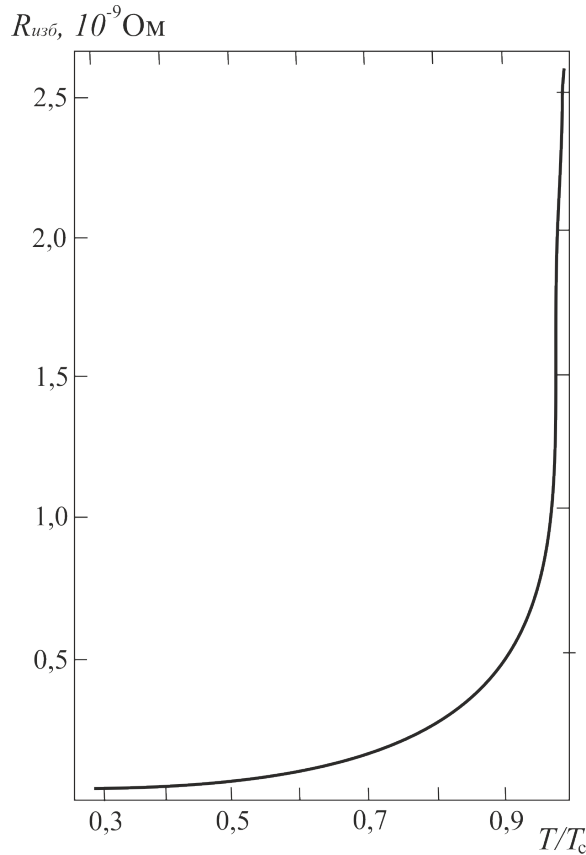


Рис. ...

где коэффициент $Z(T)$ учитывает долю всех электронов, которые переходят NS -границу не по-андреевски. Так как при $T \rightarrow 0$ все электроны отражаются от границы по-андреевски, то $Z(T \rightarrow 0) \rightarrow 0$. И наоборот, при $T \rightarrow T_c$ имеем $\Delta(T) \rightarrow 0$ и подавляющее число электронов идут через границу не по-андреевски, то есть создавая избыточное сопротивление и тогда $Z(T \rightarrow T_c) \rightarrow 1$. Поэтому $R_{NS}(T)$ будет монотонно растущей функцией температуры (см. рис. ... -рис.47.4. стр. 216 Шмидт). Так как $R_{NS}(T) \sim \lambda_Q(T)$, то при $T \rightarrow T_c$ имеем $R_{NS}(T) \sim (1 - T/T_c)^{-1/4}$, что неплохо согласуется с экспериментом (см. рис.)

идущие из N в S с энергией меньше щели $\Delta(T)$, которые отражаются по-андреевски, а также часть квазичастиц с энергией $E_p > \Delta(T)$.

Величина последней определяется тем, что инжектированный из N в S электрон, оказавшись в сверхпроводнике и имея заряд q_p , теряет часть заряда $1 - q_p$, которая уходит в конденсат. Эта часть заряда проходит через границу по-андреевски и поэтому не участвует в создании избыточного сопротивления. Поэтому избыточное сопротивление R_{NS} обычно пишут в виде

$$R_{NS} = Z(T) \rho \lambda_Q / S,$$

Неравновесное усиление сверхпроводимости (§ 48 Шмидт В.В., с. 219)

Здесь будет рассмотрен случай, когда отклонение от равновесной функции распределения квазичастиц является симметричным, то есть неравновесное распределение частиц и античастиц на обеих ветвях спектра квазичастиц одинаково. Если в ранее рассмотренных случаях неравновесных процессов распределение квазичастиц было асимметричным и не изменяло величины щели Δ , то в симметричном возбуждении квазичастиц величина щели Δ изменяется.

Создание симметрично неравновесного распределения квазичастиц можно осуществить путём облучения сверхпроводника электромагнитными волнами на частотах $\omega < 2\Delta/\hbar$. Тогда энергии фотонов, облучающих сверхпроводник, будет недостаточно для разрыва куперовских пар, но хватит для того, чтобы переместить квазичастицы на более высокие уровни спектра возбуждений. Покажем качественно, что такое неравновесное распределение квазичастиц может привести к увеличению Δ и повышению T_c .

Действительно, освобождая низшие уровни энергетического спектра квазичастиц, мы даём возможность куперовским парам конденсата совершать переходы в эти состояния, увеличивая тем самым число слагаемых в сумме, определяющей эту энергетическую щель

$$\Delta(T) = g \sum_p u_p v_p [1 - 2f_p(E_p/T)].$$

Теоретическое рассмотрение этих эффектов содержится в работах Элиашберга. На эксперименте было обнаружено увеличение критического тока сверхпроводящих мостиков, подвергаемых облучению на СВЧ.

Неравновесные эффекты и поглощение звука в N и S металлах

1. Сначала я расскажу об электронах, фононах и их взаимодействии в нормальных металлах, преимущественно при низких температурах, когда $T \ll \theta_D$. Основными результатами будут оценочные формулы для температурной зависимости времен релаксации электронов на фононах $\tau_{ep}(T)$ и фононов на электронах $\tau_{pe}(T)$ в случае их равновесия при температуре T . Для простоты будем рассматривать изотропный (квадратичный) закон дисперсии $\varepsilon_p = p^2/2m$ для электронов и дебаевский спектр для фононов $\hbar\omega_q = sq$

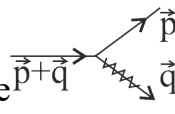
, где s – скорость звука, q – импульс фонона, а $\hbar\omega_q$ – энергия фонона с импульсом q . Пусть a – расстояние между ионами металла, то есть его плотность $\rho = M/a^3$, M – масса иона. Тогда с постоянной решетки (кубической) связаны два характерных импульса: для электронов $p_F \sim \hbar/a$ и для фононов $q_D \sim \hbar/a$ (так что $p_F \approx q_D$).

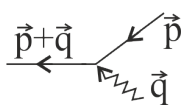
Рассмотрим теперь связь между двумя характерными энергиями в металле – фермиевской энергией $\varepsilon_F = p_F^2/2m$ для электронного газа и $\hbar\omega_D = sq_D = \theta_D$ для фононов, где θ_D – энергия фононов с длиной волны $\sim a$. Так как $\varepsilon_F \sim p_F v_F$, то отсюда следует, что $(\theta_D/\varepsilon_F) \sim s/v_F \ll 1$. Если же записать последнее неравенство в терминах отношения масс электрона и иона, то легко показать, что $(s/v_F) \sim (m/M)^{1/2}$.

Вычислим время релаксации фононов на электронах, исходя из выражения для интеграла столкновения $\mathcal{J}_{pe}$ фононов с электронами, который можно записать, исходя из двух типов процессов рассеяния электрона с излучением и поглощением фонона, в которых выполняются сохранение импульса $\vec{p}' = \vec{p} \pm \vec{q}$ и энергии $\varepsilon_{p'} = \varepsilon_p \pm \hbar\omega_q$. Тогда

$$\mathcal{J}_{pe} = 2 \sum_p W_q \delta(\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p - \hbar\omega_q) \left[f_{p+q} (1 - f_p) (N_q + 1) - f_p (1 - f_{p+q}) N_q \right],$$

где f_{p+q} , f_p и N_q есть функции распределения электронов и фононов, зависящие от соответствующих энергий ε_{p+q} , ε_p и $\hbar\omega_q$, а $W_q = \pi \mu^2 \omega_q / \rho s^2$ в рамках модели деформационного потенциала пропорционально квадрату матричного элемента электрон-фононного взаимодействия (а $\mu \sim \varepsilon_F$). Первое «приходное» слагаемое соответствует излучению то есть появлению

дополнительного фонона с импульсом $\vec{q}$ в процессе  вида, так что оно пропорционально произведению вероятности рождения дополнительного фонона $\sim (N_q + 1)$ и вероятности того, что состояние $p+q$ занято ($\sim f_{p+q}$), а состояние p – свободно ($\sim (1 - f_p)$). Второе «уходное» слагаемое в $\mathcal{J}_{pe}$

соответствует переходам из состояния p в $(p+q)$ вида  с аналогичной интерпретацией вероятностей перехода с поглощением фонона. Рассмотрим теперь релаксацию неравновесной добавки δN_q к фононной

(бозевской) функции распределения в состоянии термодинамического равновесия, когда $N_q = N_q^0 + \delta N_q$, а $f_p = f_p^0$, где N_q^0 и f_p^0 - равновесные функции распределения при температуре T . Тогда с учетом того, что в равновесии $\mathcal{J}_{pe} = 0$, имеем

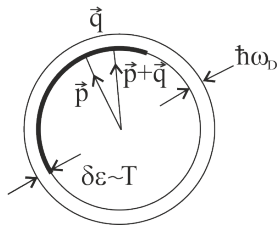
$$\mathcal{J}_{pe} = 2W_q \sum_{\vec{p}} (f_p^0 - f_{p+q}^0) \delta(\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p - \hbar\omega_q) \delta N_q = -\frac{\delta N_q}{\tau_{pe}}, \text{ где}$$

$$\nu_{pe} = \frac{1}{\tau_{pe}} = 2W_q \sum_{\vec{p}} (f_p^0 - f_{p+q}^0) \delta(\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p - \hbar\omega_q), \text{ есть частота релаксации}$$

фононов с энергией $\hbar\omega_q$ на электронах.

Воспользуемся теперь тем, что при низких температурах $T \ll \theta_D \ll \varepsilon_F$.

Тогда



$$\varepsilon_{\vec{p}+\vec{q}} \approx \varepsilon_p + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \vec{p}} \vec{q} = \varepsilon_p + \vec{v} \vec{q}, \text{ где}$$

$$\vec{v} \vec{q} = v_F q \cos \theta = \frac{v_F}{s} s q \cos \theta = (v_F/s) (\hbar\omega_q) \cos \theta; \text{ а также}$$

$$f_{p+q}^0 \approx f_p^0 + \frac{\partial f_p^0}{\partial \vec{p}} \vec{q} = f_p^0 + \frac{\partial f_p^0}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \vec{p}} \vec{q} = f_p^0 + \frac{\partial f_p^0}{\partial \varepsilon_p} \vec{v} \vec{q}.$$

Если еще учесть, что $\sum_p \rightarrow \int_0^\infty d\varepsilon N(\varepsilon) \int \frac{d\Omega}{4\pi}$ и $W_q \approx \frac{\omega}{N(\varepsilon_F)}$ то

$$(1/\tau_{pe}) = 2\omega \frac{N(\varepsilon_F)}{N(\varepsilon_F)} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{2} \cdot \frac{v_F}{s} (\hbar\omega_q) \cos \theta \left[\frac{v_F}{s} (\hbar\omega_q) \right]^{-1} \delta \left(\cos \theta - \frac{s}{v_F} \right), \text{ так как}$$

$$\delta(\vec{v} \vec{q} - \hbar\omega_q) = \delta \left[\frac{v_F}{s} (\hbar\omega_q) \cos \theta - \hbar\omega_q \right] = \left[\frac{v_F}{s} (\hbar\omega_q) \right]^{-1} \delta \left(\cos \theta - \frac{s}{v_F} \right) \text{ ввиду того, что}$$

$$\int \dots \delta(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int \delta(x) dx \dots \text{ Окончательно}$$

$$\frac{1}{\tau_{pe}} = -2\omega \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos \theta \delta \left(\cos \theta - \frac{s}{v_F} \right) = \omega \frac{s}{v_F} \ll \omega.$$

Тогда длина свободного пробега фонона с частотой при рассеянии ω на

электронах l_{pe} есть: $l_{pe} \approx s \tau_{pe} \approx \cancel{s} \frac{v_F}{\omega \cancel{s}} \sim \frac{v_F}{\omega}$ и затухание звука при падении на

поверхность металла вдоль координаты x , $I(x)$ будет

$$I(x) = I_0 e^{-\Gamma x}, \text{ где } \Gamma \sim \frac{1}{l_{pe}} \sim \frac{\omega}{v_F}.$$

2. Оценка τ_{ep}^ε из принципа детального равновесия.

Вернемся сначала к оценке $l_{ep} \sim v_F/\omega$ с тем, чтобы переписать ее в терминах температуры T (в энергетических единицах). Действительно,

$$l_{ep} \sim \frac{\hbar v_F}{\hbar \omega} \sim \frac{\hbar}{a} \cdot \frac{av_F}{T} \sim a \frac{p_F v_F}{T} \sim a \left(\frac{\varepsilon_F}{T} \right) \gg a.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в равновесии при температуре T средняя энергия фонона $\hbar \omega \sim T$. Перепишем еще в терминах температуры T оценку для $v_{pe} \sim \omega(s/v_F)$. Это дает

$$v_{pe} \sim (\hbar \omega / \hbar)(s/v_F) \sim (T/\hbar)(sq_D/p_F v_F) \sim (T/\hbar)(\hbar \omega_D/\varepsilon_F) \sim \omega_D(T/\varepsilon_F).$$

Согласно принципу детального равновесия при температуре T среднее число излученных электронами фононов $N_e(T) \cdot v_{pe}(T)$ должно быть равно числу поглощенных электронами фононов $N_{ph}(T) \cdot v_{pe}(T)$. Так как $v_{pe}(T)$ нам известно, то

$$v_{pe}(T) \sim v_{pe}(T) \cdot [N_{ph}(T)/N_e(T)],$$

Где $N_{ph}(T) \sim N(T/\theta_D)^3$, а $N_e(T) \sim N(T/\varepsilon_F)$. Тогда

$$v_{pe}(T) \sim \omega_D \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right) \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \left(\frac{\varepsilon_F}{T} \right) \sim \omega_D \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \sim \left(\frac{\theta_D}{\hbar} \right) \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3.$$

Заметим, что в оценку $v_{pe}(T)$ не входят характеристики электронной подсистемы металла.

Поглощение ультразвука в сверхпроводнике

1. Для описания влияния внешнего периодического возмущения (например ультразвука или электромагнитных волн) на электроны металла к гамильтониану должно быть добавлено слагаемое, ответственное за такое взаимодействие (и не изменяющее спина электронов):

$$H_{\text{int}} = \sum V_{p'p} c_{p'\sigma}^+ c_{p\sigma}$$

Здесь $V_{p'p}$ - матричный элемент перехода между одноэлектронными состояниями нормального металла с импульсами p и p' , зависящих только

от $\theta = (\vec{p}, \vec{p}')$. Это выражение для H_{int} соответствует исчезновению электрона с импульсом p и спином σ и рождению вместо него другого с импульсом p' и тем же спином σ . В нормальном состоянии каждое из слагаемых суммы H_{int} независимо от других и квадрат каждого из коэффициентов $V_{p',p}$ пропорционален соответствующей вероятности перехода. В сверхпроводящем состоянии, которое является разово-когерентной суперпозицией занятых одноэлектронных состояний (квазичастиц) такой пропорциональности уже нет. В результате в сумме по состояниям p , p' и σ появляются интерференционные слагаемые (пропорциональные так называемым факторам когерентности), отсутствующие в нормальном состоянии металла.

Их появление обнаруживается, если выразить операторы $c_{p'\sigma}^+$ и $c_{p\sigma}$ через операторы квазичастиц Боголюбова – Валатина по формулам

$c_{p\uparrow} = u_p \gamma_{p\uparrow} + v_p \gamma_{-p\uparrow}^+$ и $c_{p\downarrow} = u_p \gamma_{p\downarrow} - v_p \gamma_{-p\downarrow}^+$. Тогда, если отбросить слагаемые, описывающие рождение или уничтожение двух квазичастиц (то есть пропорциональные операторам $\gamma^+ \gamma^+$ или $\gamma \gamma$), оказываются, что

$$H_{\text{int}} = \sum_{\sigma, p, p'} (u_p u_{p'} - v_p v_{p'}) \gamma_{p'\sigma}^+ \gamma_{p\sigma} v_{p'p}.$$

Тогда все изменения по сравнению с формулой для поглощенной электронами энергией Q в единице объема в единицу времени для нормального металла будет состоять в появлении множителя

$$(u_p u_{p'} - v_p v_{p'})^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right), \text{ то есть}$$

$$Q = \frac{\pi\omega}{2} \sum_{p, p'} |U_{p'p}|^2 \left(1 + \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right) \delta(\hbar\omega_{p'p} - \hbar\omega) \left(-\frac{\partial f_p^0}{\partial E_p} \right) \hbar\omega,$$

и тому, что здесь $\hbar\omega_{p'p} = E_{p'} - E_p$ и $f_p^0 = [\exp(E_p/T) + 1]^{-1}$, где

$$E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2(T)}.$$

Отметим еще, что ввиду четности E_p и $E_{p'}$ по ξ_p и $\xi_{p'}$, при переходе от суммирования по p, p' к интегрированию по $d\xi$ и $d\xi'$, нечетные слагаемые, пропорциональные $\xi_p \xi_{p'}$, исчезнули. Тогда

$$Q_s = \frac{\pi\omega}{2} \sum_{p,p'} |U_{p',p}|^2 \left(\frac{E_p E_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right) \delta[E_{p'} - (E_p + \hbar\omega)] (f_p^0 - f_{p'}^0).$$

При переходе к нормальному металлу, когда $\Delta = 0$ и $E_p = \xi_p$ для энергии Q_n , поглощенной нормальными электронами, имеем

$$Q_n = \frac{\pi\omega}{2} \sum_{p,p'} |U_{p',p}|^2 \delta(\hbar\omega_{p',p} - \hbar\omega) (f_p^0 - f_{p'}^0).$$

В выражении для Q_s перейдем от суммирования по pp' к интегрированию по dE и dE' , где $E = E_p$ и $E' = E_{p'}$, с учетом того, что $\sum_p \rightarrow \int dE N(E)$, где $N(E) = N(0) E / \sqrt{E^2 - \Delta^2}$ есть плотность состояний возбуждений в сверхпроводнике (боголонов), а $N(0)$ - плотность состояний нормальных электронов на уровне Ферми. Тогда с учетом наличия $\delta[E' - (E + \hbar\omega)]$ в подынтегральном выражении и того, что $f^0(E) - f^0(E') \simeq -(\partial f^0 / \partial E) \hbar\omega$ имеем

$$Q_s = \frac{\pi\omega}{2} W_q \int_{\Delta}^{\infty} dE N^2(0) \frac{E(E + \hbar\omega) - \Delta^2}{\sqrt{E^2 - \Delta^2} \sqrt{(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2}} \left(-\frac{\partial f^0}{\partial E}(\hbar\omega) \right).$$

Аналогичные преобразования в выражении для Q_n с учетом того, что $\sum_p \rightarrow N(0) \int d\varepsilon$ дает

$$Q_s = \frac{\pi\omega}{2} W_q \int_0^{\infty} d\varepsilon N^2(0) \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \hbar\omega \right) = \frac{\pi\omega}{2} W_q N^2(0) \hbar\omega \left(-f^0(\xi) \right) \Big|_0^{\infty},$$

где $-f^0(\xi) \Big|_0^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ и $\xi = \varepsilon - \mu$.

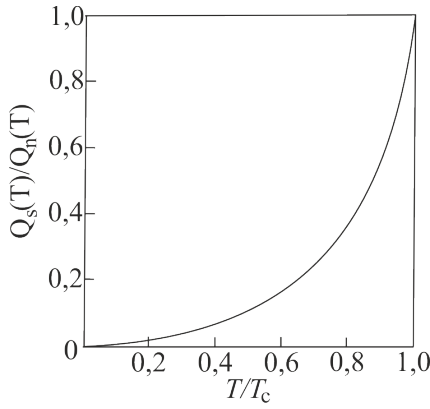
В выражении для Q_s воспользуемся тем, что $\hbar\omega \ll \Delta$ на эксперименте.

Тогда

$$Q_s = \frac{\pi\omega}{2} W_q N^2(0) \hbar\omega \left(-f^0(\xi) \right) \Big|_{\Delta}^{\infty} = \frac{\pi}{2} W_q N^2(0) \hbar\omega f^0(E = \Delta).$$

На опыте обычно измеряется отношение Q_s/Q_n , которое тогда имеет простой вид

$$Q_s(T)/Q_n(T) = 2 f^0(\Delta) = \frac{2}{1 + e^{\Delta(T)/T}}.$$



На приведенном рисунке резкое падение Q_s/Q_n вблизи T_c отражает быстрое уменьшение числа возбуждений при появлении щели сверхпроводника в энергетическом спектре ниже T_c .

Поглощение звука в нормальном металле (теория возбуждения)

Вероятность перехода электрона под действием периодического возмущения с частотой звука ω из состояния p в состояние p' равна

$$w_{p'p} = (\pi/2\hbar^2) \left[|U_{p'p}|^2 \delta(\omega_{p'p} - \omega) + |U_{p'p}^+|^2 \delta(\omega_{p'p} + \omega) \right],$$

где $\hbar\omega_{p'p} = \varepsilon_{p'} - \varepsilon_p$ и первое слагаемое соответствует поглощению фонона ($\varepsilon_{p'} = \varepsilon_p + \hbar\omega$), а второе слагаемое – испусканию фонона ($\varepsilon_{p'} = \varepsilon_p - \hbar\omega$). Что бы вычислить энергию Q , поглощенную электронами в единицу времени, эту вероятность $w_{p'p}$ надо умножить на вероятность того, что состояние p занято, а состояние p' свободно (то есть на $f_p^0(1 - f_{p'}^0)$), а также на $\hbar\omega_{p'p}$ и на двойку, учитывающую спин электрона который сохраняется на переходе, и просуммировать по всем p и p' . Тогда

$$Q = \sum_{pp'} \hbar\omega_{p'p} w_{p'p} = \sum_{pp'} \omega_{p'p} (\pi/\hbar) \left[|U_{p'p}|^2 \delta(\omega_{p'p} - \omega) + |U_{p'p}^+|^2 \delta(\omega_{p'p} + \omega) \right] f_p^0 (1 - f_{p'}^0).$$

Во втором слагаемом сделаем замену $U_{p'p}^+ = U_{pp'}^*$ и при взятии суммы по p, p' заменим индексы суммы $p \rightleftharpoons p'$. В результате этого $\omega_{p'p} \rightarrow -\omega_{pp'}$ и в сумме останется только одно слагаемое с поглощением фонона, то есть

$$Q = \pi\omega \sum_{pp'} |U_{p'p}|^2 \delta(\hbar\omega_{p'p} - \hbar\omega) [f_p^0 - f_{p'}^0].$$

Учтем, теперь закон сохранения импульса при переходе электрона из состояния p в состояние p' , то есть $\vec{p}' = \vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{q}$ - импульс поглощенного фонона и $\hbar\omega_q = sq$, где s - скорость продольного звука и q - величина импульса фонона. Тогда $|U_{p'p}|^2 = W_q \approx \omega/N(0)$, где $N(0)$ - плотность состояний электронов на уровне Ферми. Тогда

$$Q = \pi\omega \sum_{pp'} |U_{p',p}|^2 \delta(\hbar\omega_{p',p} - \hbar\omega) (f_p^0 - f_{p'}^0) \delta[p' - (p+q)] = \pi\omega \sum_{pp'} W_q \delta(\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p - \hbar\omega_q) (f_p^0 - f_{p'}^0).$$

Теперь, как и в случае вычисления τ_{pe}^{-1} , перейдем к вычислению

$$\sum_p \rightarrow \int d\vec{p} = \int_0^\infty d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{dO}{4\pi}, \text{ где } \frac{dO}{4\pi} = \frac{2\pi}{4\pi} \sin\theta d\theta = -(1/2) d(\cos\theta), \text{ то есть}$$

$$\sum_p \rightarrow \int_0^\infty d\varepsilon N(\varepsilon) \int_0^1 d(\cos\theta).$$

Учтем, как и ранее, что $f_p^0 - f_{p+q}^0 \simeq -\frac{\partial f_p^0}{\partial \varepsilon} \vec{v} \cdot \vec{q}$ и $\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p \simeq \vec{v} \cdot \vec{q}$, где

$$\vec{v} \cdot \vec{q} = v_F q \cos\theta = (v_F/s)(\hbar\omega_q) \cos\theta. \text{ Тогда } -\frac{\partial f_p^0}{\partial \varepsilon} = \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \text{ и}$$

$$\delta(\vec{v} \cdot \vec{q} - \hbar\omega_q) = \left[(v_F/s)(\hbar\omega_q) \right]^{-1} \delta(\cos\theta - s/v_F) \text{ и } \sum_p \delta(\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p - \hbar\omega_q) (f_p^0 - f_{p'}^0) =$$

$$= N(0) \int_0^1 d(\cos\theta) \left[(v_F/s)(\hbar\omega_q) \right] \cos\theta \left[(v_F/s)(\hbar\omega_q) \right]^{-1} \delta\left(\cos\theta - \frac{s}{v_F}\right) = N(0) \frac{s}{v_F}.$$

Окончательно,

$$Q = \pi\omega W_q \cdot N(0) \frac{s}{v_F} = \pi\omega^2 (s/v_F) \approx \omega v_{pe}.$$

Релаксационные процессы в сверхпроводниках

1. Начну с того, что релаксационные процессы в нормальных металлах были исследованы достаточно полно еще до создания теории БКШ. На предыдущих лекциях я показал, как на основе принципа детального равновесия можно сделать оценки связи времен релаксации электронов на фононах и фононов на электронах в условиях термодинамического равновесия. При переходе металла из нормального состояния в сверхпроводящее эти времена могут существенно измениться с понижением температуры по причине уменьшения числа электронных возбуждений (квазичастиц) из-за образования конденсата куперовских пар. Представляется, однако, что для анализа таких изменений следует более подробно изложить постановку аналогичных задач в кинетике нормальных металлов.

Здесь, как известно, достаточно слабо возбужденные состояния металла с хорошей точностью описать в терминах квазичастиц, то есть одночастичных возбуждений электронной и ионной подсистемы металла. Последнее

предполагает, что взаимодействие между квазичастицам можно описать в терминах их «столкновений», что справедливо, если $t_{\text{int}} \ll \tau$, где t_{int} - время «столкновения», а τ - время жизни (свободного пробега) квазичастиц.

Для электронов в металле область применимости такой концепции дается неравенством $T \ll \varepsilon_F$, а для фононов – малостью амплитуд смещений атомов из положения равновесия, оправдывающей применимость гармонического приближения.

Основная кинематическая характеристика квазичастиц – из закон дисперсии, который для электронов мы будем писать в виде $\varepsilon(\vec{p})$, а для фононов - $\omega(\vec{q})$. Здесь $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - квазиимпульсы электронов и фононов, соответственно. Знание закона дисперсии достаточно для построения термодинамики соответствующих возбуждений (например, их средней энергии, их числа) если учесть, что вид функции распределения квазичастиц по состояниям является универсальным, то есть дается распределением Гиббса. Последнее определяется лишь температурой T и интенсивностью внешних полей (упругих и магнитных). В частности, для фермионов $f_p = \left[e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} + 1 \right]^{-1}$, а для бозонов $N_q = \left[e^{\hbar\omega_q/T} - 1 \right]^{-1}$. Например, для вычисления среднего числа квазичастиц как функции температуры T надо вычислить $N_e(T) = \sum_p f_p$ и $N_{ph}(T) = \sum_q N_q$. Аналогично для вычисления теплоемкости квазичастиц необходимо вычислять их среднюю энергию $E_e(T) = \sum_p \varepsilon_p f_p$ и $E_{ph}(T) = \sum_q \hbar\omega_q N_q$.

Существенно, что если в равновесии при температуре T функция распределения квазичастиц зависит лишь от их энергии, то в более общей неравновесной ситуации для описания неравновесного состояния вводят функцию распределения $f(\vec{p}, \vec{r}, t)$, физический смысл которой – это плотность числа квазичастиц вблизи координат $\vec{r}$ и импульсов $\vec{p}$ их $(\vec{r}, \vec{p})$ фазового пространства в момент времени t .

Важной особенностью неравновесной ситуации является то, что вид $f_p(\vec{r}, t)$ или $N_q(\vec{r}, t)$ уже не является универсальным, а определяется величиной и динамикой внешних полей, начальными и граничными условиями, а также механизмами взаимодействия квазичастиц между собой и с точечными (или

другого рода) дефектами металла. Способ нахождения неравновесных f_p или N_q , основанный на решении так называемого кинетического уравнения в виде уравнения Больцмана мы подробно обсудим ниже. Стоит еще отметить, что если уравнения движения квазичастицы вида $d\vec{r}/dt = \partial\epsilon/\partial\vec{p}$ и $d\vec{p}/dt = \partial\epsilon_p/\partial\vec{r}$ для электронов описывают теперь динамику квазичастиц (с заданной кинематикой), то уравнение Больцмана есть обобщение динамических уравнений для одной частицы на ансамбль взаимодействующих (между собой или с рассеивающими центрами) квазичастиц. Отметим еще, что при переходе от неравновесной ситуации с функциями f_p и N_q к состоянию термодинамического равновесия при температуре T эти функции переходят в равновесные фермиевскую f_p^0 и бозевскую N_p^0 , соответственно. При исследовании кинетики неравновесных состояний квазичастиц в металлах обычно рассматриваются две характерных постановки задач.

Первая из них связана с изучением потоков (частиц, энергии, импульса) как функций интенсивности к частоте изменения внешних полей. Например, если $f_p(\vec{r}, t)$ известна, то величина плотности потока квазичастиц есть $j = \sum_p v_p f_p(\vec{r}, t)$, где $v_p = \partial\epsilon_p/\partial\vec{p}$, а для плотности потока энергии квазичастиц $j_Q = \sum_p (\epsilon_p - \mu) v_p f_p(\vec{r}, t)$, где μ - их химический потенциал. Если внешние поля малы, то есть мы рассматриваем линейный отклик, то из известного феноменологического рассмотрения мы знаем, что $\vec{j}_e = \sigma \vec{E}$ и $j_Q = \kappa \nabla T$, где σ и κ есть коэффициенты электропроводности, и теплопроводности электронных возбуждений, соответственно. В этом случае одной из задач является микроскопический расчет величины кинетических коэффициентов σ и κ в неравновесном подходе.

Вторая типичная постановка задач неравновесной кинетики квазичастиц связана с излучением времен релаксации неравновесного состояния к состоянию полного (или частичного!) термодинамического равновесия лишь за счет процессов взаимодействия квазичастиц между собой или с центрами рассеивания.

Задачу о релаксации можно формулировать и как задачу о нахождении времени τ (или частоты) $\nu = 1/\tau$ термализации квазичастицы с энергией ϵ_p или $\tau_q = \tau(\hbar\omega_q, T)$ $\hbar\omega_q$ «впрыснутой» в равновесную среду при температуре T и

тогда $\tau_p = \tau(\varepsilon_p, T)$ и $\tau_q = \tau(\hbar\omega_q, T)$. Отметим здесь, что понятие о времени релаксации квазичастицы определено лишь тогда, когда заранее известно, к какому распределению (состоянию) релаксирует квазичастица.

Излагаемые ниже подход к исследованию кинетики электронов и фононов в металле использует для них простейшие законы дисперсии – изотропный квадратичный закон дисперсии для электронов и дебаевский спектр для фононов. Существенным, однако, будет являться учет конкретных механизмов рассеяния квазичастиц друг на друге и на рассеивателях.

Общая картина релаксации в сверхпроводниках

2. Самой важный (и, вообще говоря, при $T \leq \Delta$ самый быстрый) процесс – это установление самосогласованного поля параметра порядка Δ (или щели в беспримесных сверхпроводниках, то есть формирование закона дисперсии квазичастиц $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta(T)^2}$). Характерное время такого процесса при температурах T , достаточно удаленных от T_c , можно оценить как время установления куперовских корреляций, равное времени прохождения электроном с фермиевской скоростью v_F корреляционной длины $\xi_0 \sim \hbar v_F / \Delta$, что дает $\tau_\Delta \sim \xi_0 / v_F \sim \hbar / \Delta \sim 10^{-12}$ сек. По прошествии этого времени появляется конденсат куперовских пар и связанная с ним дополнительная энергия сверхпроводящего состояния $(E_s - E_n) \sim -N(0)\Delta^2$. Одновременно с появлением конденсата появляются и возбуждения с законом дисперсии $E_p = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$.

Второй этап релаксации связан с процессами взаимодействия между конденсатом и квазичастицами. При отсутствии внешних воздействий это процессы, ведущие к состоянию термодинамического равновесия в сверхпроводнике, находящиеся при температуре T . Скорости этих процессов оцениваются в первом порядке теории возмущений (в случае слабой связи, когда $\Delta \ll \theta_D$). При этом следует различать два типа процессов рассеяния. Первый случай это упругие процессы, ведущие лишь к релаксации импульса квазичастиц с сохранением их энергии, например их рассеяние на примесях, на границах образца, дислокациях и т. п. Во втором случае – это процессы энергетической релаксации квазичастиц, связанные с их взаимодействием

между собой и с фононами. Такие процессы также могут быть двух типов – сводящиеся лишь к рассеянию без изменения плотности конденсата или приводящие к развалу и рекомбинации куперовских пар. Например, в последнем случае возбуждение в энергией $>3\Delta$ может развалиться на три возбуждения с энергией порядка Δ , или фонон с энергией $\hbar\omega > 2\Delta$ может развалить куперовскую пару на два возбуждения, или два возбуждения могут рекомбинировать с образования куперовской пары.

В равновесном состоянии при температуре T с уже сформированной щелью $\Delta(T)$ существует динамическое равновесие между нормальной и сверхпроводящей компонентами, то есть между квазичастицами и конденсатом. Как и в случае нормального металла, при переходах между возбуждениями и конденсатом куперовских пар должен выполняться принцип детального равновесия, который интегрально состоит в том, что число разрушенных куперовских пар $N_{\uparrow}$ и число сконденсированных квазичастиц $N_{\downarrow}$ в единицу времени должны быть равны. Если $W_{\uparrow} = N_{\uparrow}/N_s$ есть отношение числа разрушенных в единицу времени пар к их полному числу и его можно называть частотой возбуждения конденсата, а $W_{\downarrow} = N_{\downarrow}/N_n$ – частотой рекомбинации возбуждений, то принцип детального равновесия утверждает, что $W_{\uparrow}(T)N_s(T) \simeq W_{\downarrow}(T)N_n(T)$. Если учесть, что в равновесии $N_n(T) \sim e^{-2\Delta(T)/T} N_s(T)$, то отсюда следует, что соответствующие частоты возбуждения пар и рекомбинации возбуждений удовлетворяют соотношению

$$\frac{W_{\uparrow}(T)}{W_{\downarrow}(T)} \simeq e^{\frac{2\Delta(T)}{T}}.$$

Рассмотрим это соотношение в двух простейших предельных случаях. Если $T \ll \Delta(T)$, то есть температуры T достаточно низкие, то тогда $W_{\uparrow}(T) \ll W_{\downarrow}(T)$, что соответствует также неравенству $N_s \gg N_n$. Если же $T \gg \Delta(T)$, то есть температура T вблизи T_c , то ситуация обратная, то есть $W_{\uparrow}(T) \gg W_{\downarrow}(T)$ и $N_s \ll N_n$.

Резюмируя этот качественный подход к обсуждению времен релаксации куперовских пар и квазичастиц, следует подчеркнуть, что время установления Δ после «внезапного» изменения параметров сверхпроводника (тока через него, магнитного и электрического полей) определяется самой величиной Δ с

оценкой $\tau_\Delta \sim \hbar/\Delta$. Время же релаксации «установившегося значения Δ » к состоянию равновесия при температуре T , то есть к $\Delta(T)$, определяется уже эффективностью тех или иных процессов неупругой релаксации. Например, простейшая оценка времени развала фононом с энергией $\hbar\omega_q > 2\Delta(T)$ куперовской пары может быть получена из условия того, чтобы фонон провзаимодействовал практически одновременно с обоими электронами пары размером $\xi(T)$. Это тогда дает $\tau_r \sim \xi(T)/s \sim (\xi/v_F)(v_F/s) \sim [\hbar/\Delta(T)](v_F/s) \sim 10^{-12} \cdot 10^3 \text{ сек} \sim 10^{-9} \text{ сек}$, что на три порядка больше времени релаксации щели $\tau_\Delta \sim \hbar/\Delta$. Тогда из принципа детального равновесия при температуре T следует, что

$$W_\downarrow(T) \sim W_\uparrow(T) e^{2\Delta(T)/T} \sim (1/\tau_r) e^{2\Delta(T)/T} \sim (s/v_F) [\Delta(T)/\hbar] \exp(2\Delta(T)/T) \sim 1/\tau_R,$$

где τ_R – время рекомбинации квазичастиц, то есть выпадения их в конденсат.

Переходя от качественного анализа релаксационных процессов в сверхпроводнике к их количественному анализу в теории БКШ, рассмотрим сначала процессы, которые могут происходить благодаря электрон-фононному взаимодействию Гамильтониан такого взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{H}_{ep} = \sum_{p,p',q,\sigma} V_q a_{p'\sigma}^+ a_{p\sigma} b_q^+ + \text{э.с.},$$

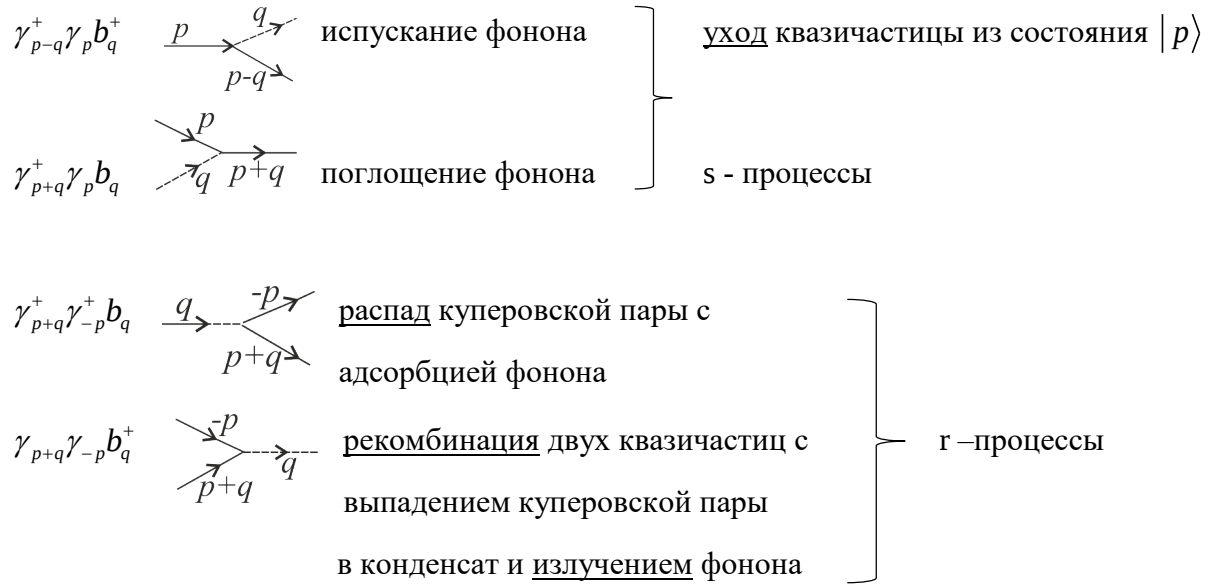
где $a_{p'\sigma}^+$ и $a_{p\sigma}$ – соответственно операторы рождения и уничтожения электронов с импульсами p' , p и спином σ , b_q^+ – оператор рождения фонона с импульсом q , V_q – матричный элемент электрон-фононного взаимодействия. Переходя в этом гамильтониане к операторам рождения и уничтожения квазичастиц по формулам Боголюбова-Валатина, можно получить что

$$\mathcal{H}_{ep} = \sum_{p,p',q,\sigma} V_q \left[(u_p u_{p'} - v_p v_{p'}) (\gamma_{p'\uparrow}^+ \gamma_{p\uparrow} + \gamma_{p'\downarrow}^+ \gamma_{p\downarrow}) + (u_p v_{p'} + v_p u_{p'}) (\gamma_{p'\uparrow}^+ \gamma_{p\downarrow} + \gamma_{p'\downarrow}^+ \gamma_{p\uparrow}) \right] b_q^+ + \text{э.с.}$$

Здесь, как и прежде при анализе поглощения звука в сверхпроводнике, $u_p^2 = (1/2)(1 + \xi_p/E_p)$, $v_p^2 = (1/2)(1 - \xi_p/E_p)$, однако теперь мы оставили слагаемые, пропорциональные операторам $\gamma^+ \gamma^+$ и $\gamma \gamma$. Если первое слагаемое в $\mathcal{H}_{ep}$ описывают излучение и поглощение фононов квазичастицами сверхпроводника (s – процессы, от слова scattering), то третье и четвертое

слагаемое соответствуют распадам куперовских пар с поглощением фонона и рекомбинацию квазичастиц с выпадением куперовской пары в конденсат и излучением фонона (r – процессы, от слова recombination). Отметим еще, что слагаемые типа $\gamma^+ \gamma^+ b^+$ и $\gamma \gamma b$ в силу невозможности выполнить закон сохранения энергии в первом порядке теории возмущений по ЭФВ не появляются.

Изобразим четыре типа реальных процессов взаимодействия квазичастиц и конденсата с фононами, идущих с сохранением энергии и импульса в виде следующих графиков:



Если обозначить $A^\pm = 1 \pm \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}}$, то факторы когерентности для s – процессов в $\mathcal{H}_p$ будут $(u_p u_{p'} - v_p v_{p'})^2 = A^+$ и для r – процессов $(u_p v_{p'} + v_p u_{p'})^2 = A^-$. Тогда – интеграл столкновений квазичастиц (с законом дисперсии) и фононов (с законом дисперсии $\hbar \omega_q = sq$, где q - импульс фонона) будет равен

$$\mathcal{J}_p^s(f, N) = \pi \sum_{p', q} |V_q|^2 \left(1 + \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right) \left\{ \left[N_q (1 - f_p) f_{p'} - (N_q + 1) f_p (1 - f_{p'}) \right] \delta(E_p - E_{p'} - \hbar \omega_q) \cdot \right.$$

$$\left. \delta(p - p' - q) - \left[f_{p'} (1 - f_p) (N_q + 1) - (1 - f_{p'}) f_p N_q \right] \delta(E_{p'} - E_p - \hbar \omega_q) \delta(p' - p - q) \right\},$$

$$\text{где } \delta(p) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 0 & p \neq 0. \end{cases}$$

Если, как и прежде в линейном отклике по возмущению, определить время жизни квазичастицы с импульсом по отношению к s – процессам $\tau_{ep}^s(p)$ как по формуле

$$\frac{1}{\tau_{ep}^s(p)} = - \left(\frac{\delta \mathcal{J}_p^s(f, N)}{\delta f_p} \right)_{f_p^0, N_q^0},$$

где f_p^0 и N_q^0 есть равновесные при температуре T фермиевская и бозевская функции распределения квазичастиц и фононов, то после варьирования получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{ep}^s(p)} \equiv v_{ep}^s(p) = \pi \sum_{p', q} W_q \left(1 + \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right) & \left[(1 - f_p^0 + N_q^0) \delta(E_p - E_{p'} - \hbar \omega_q) \delta(p - p' - q) + \right. \\ & \left. + (f_{p'}^0 + N_q^0) \delta(E_{p'} - E_p - \hbar \omega_q) \delta(p' - p - q) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $v_{ep}^s(p)$ – частота столкновений квазичастиц с фононами, а $W_q \equiv |V_q|^2$. Если $\xi_p \approx v_F(p - p')$, то есть использовать, как и раньше, квадратичный закон дисперсии для электронов, то переход от суммирования к интегрированию позволяет вычислить $v_{ep}^s(p)$. Оказывается, что если $T \ll T_c$, то

$$v_{ep}^s(p) \sim \begin{cases} \left(\frac{\theta_D}{\hbar} \right) \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{\sqrt{E_p^2 - \Delta_0^2}}{E_p} & (E_p - \Delta_0) \ll T \ll T_c \\ \left(\frac{\theta_D}{\hbar} \right) \left(\frac{E_p}{\theta_D} \right)^3 & E_p \gg \Delta_0 \gg T \end{cases},$$

где $\Delta_0 = \Delta(T=0)$.

Из формулы для $v_{ep}^s(p)$ следует, что при $T \ll T_c$ температурная зависимость частоты рассеяния появляется лишь для частиц, находящихся над верхним краем энергетической щели, когда $E_p \sim \Delta_0$.

Вычисление средней частоты столкновений по формуле $v_{ep}^s = \sum_p v_{ep}^s(p) f_p^0 / \sum_p f_p^0$, где f_p^0 – равновесная фермиевская функция квазичастиц с энергией E_p , дает

$$v_{ep}^s(p) \sim \frac{\theta_D}{\hbar} \begin{cases} (\Delta_0 / \theta_D)^3 (T / \Delta_0)^{7/2} & T \ll \Delta_0 \\ (T / \theta_D)^3 & (T_c - T) \ll T_c \end{cases},$$

Переходя к исследованию процессов распада куперовской пары с поглощением фонона и рекомбинации квазичастиц с испусканием фонона для $\mathcal{S}_p^r(f, N)$ с учетом фактора когерентности A^- можно записать

$$\mathcal{S}_p^r(f, N) = 2\pi \sum_{p', q} |V_q|^2 \left(1 - \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right) \left[(1 - f_p)(1 - f_{p'}) N_q - f_p f_{p'} (N_q + 1) \right] \delta(E_p + E_{p'} - \hbar \omega_q) \delta(p + p' - q),$$

что после варьирования по f_p дает

$$\frac{1}{\tau_{ep}^r(p)} \equiv v_{ep}^r(p) = 2\pi \sum_{p', q} |V_q|^2 \left(1 - \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right) (f_{p'}^0 + N_q^0) \delta(E_p + E_{p'} - \hbar \omega_q) \delta(p + p' - q).$$

Интерпретирование $v_{ep}^r(p)$ в предельных случаях низких $T \ll T_c$ и близких к критической $(T_c - T) \ll T$ температур можно получить, как и для $v_{ep}^s(p)$, что дает оценочные формулы для времени жизни квазичастицы по отношению к γ -процессам в зависимости от E_p и T

$$v_{ep}^r(p) \sim \begin{cases} \left(\frac{\theta_D}{\hbar} \right) \left(\frac{E_p + \Delta_0}{\theta_D} \right)^3 \frac{\Delta_0}{E_p} \left(\frac{T}{\Delta_0} \right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta_0}{T}}, & T \ll \Delta_0 \\ \left(\frac{\theta_D}{\hbar} \right) \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, & \Delta(T) \ll E_p \ll T_c \end{cases}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами для $v_{ep}^s(p)$, мы видим, что при $T \ll T_c$ рассеяние квазичастиц с данной энергией E_p фононами происходит гораздо быстрее, чем распады куперовских пар и рекомбинации квазичастиц. Вблизи T_c , однако, скорости s и γ процессов оказываются одного порядка, что легко объясняется тем, что в этом случае $\Delta(T) \ll T_c$.

Вычисление средней частоты γ -процессов по аналогии с предыдущим вычислением для s процессов дает оценку

$$v_{ep}^r(p) \sim \begin{cases} \left(\frac{\theta_D}{\hbar} \right) \left(\frac{\Delta_0}{\theta_D} \right)^3 \left(\frac{T}{\Delta_0} \right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta_0}{T}}, & T \ll \Delta_0 \\ \left(\frac{\theta_D}{\hbar} \right) \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, & (T_c - T) \ll T_c \end{cases}.$$

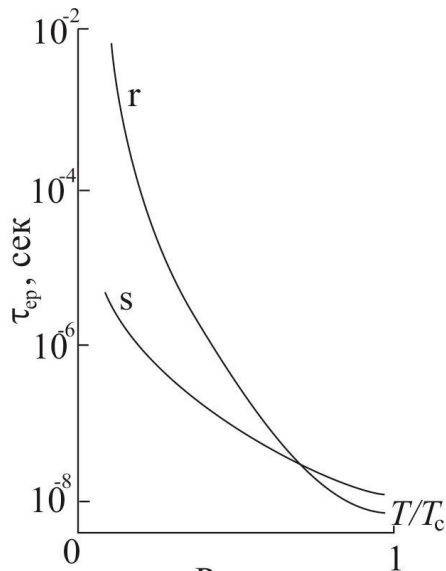


Рис.

Времена релаксации квазичастиц на фононах как функция T/T_c для Al.

Как и прежде, эта оценка показывает, что при низких температурах $T \ll T_c$ оказывается, что $v_{ep}^r(p) \ll v_{ep}^s(p)$, а для температур вблизи T_c будет $v_{ep}^r(p) \sim v_{ep}^s(p)$. Приведенные выше оценки обратных времен релаксации электронных возбуждений в сверхпроводнике на фононах позволяют представить эту картину следующим образом. При низких температурах ($T \ll T_c$) в системе квазичастиц сначала за счет процессов рассеяния на фононах (s – процессы) за время $\tau_{ep}^s(p)$

устанавливается распределение с заданной температурой и химическим потенциалом, который определяется числом квазичастиц. Затем за время, которое гораздо больше $\tau_{ep}^s(p)$, в результате процессов рекомбинации квазичастиц и распада куперовских пар (r – процессы) устанавливаются и равновесие по числу квазичастиц, соответствующие заданной температуре сверхпроводника.

При повышении температуры характер s и r процессов меняется так, что при T вблизи T_c релаксация практически совпадает (с точностью до $(\Delta/T_c)^2 \ll 1$ (смотри рис.)) с релаксацией электронов на фононах в нормальном металле.